

Д. БЕРТСЕКАС
С. ШРИВ

СТОХАСТИЧЕСКОЕ
ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

Д. БЕРТСЕКАС, С. ШРИВ

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

СЛУЧАЙ
ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Перевод с английского *В.И. Луткова, В.А. Хаванскова*

Под редакцией *А.А. Юшкевича*



МОСКВА "НАУКА"

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1985

32.81

Б 52

УДК 62-50

**STOCHASTIC OPTIMAL
CONTROL**

The Discrete Time Case

DIMITRI P.BERTSEKAS

STEVEN E.SHREVE

ACADEMIC PRESS

New York San Francisco London
1978

Бертсекас Д., Шрив С. Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. Пер. с англ./Под ред. А.А. Юшкевича. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 280 с.

Книга посвящена проблемам управления при неполной информации в дискретных системах. Монография содержит единообразную и математически строгую теорию широкого класса задач динамического программирования и стохастического оптимального управления в дискретном времени.

Илл. 2. Библиогр. 129 назв.

© 1978, Academic Press, Inc.
All Rights Reserved.

© Перевод на русский язык,
Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1985

1502000000—058
Б ————— 158-85
053 (02) -85

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода	6
Предисловие	12

Глава 1

Введение	14
1.1. Структура моделей последовательного принятия решений	14
1.2. Задачи стохастического оптимального управления с дискретным временем: вопросы измеримости	17
1.3. Связь книги с литературой	25

ЧАСТЬ I

АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Глава 2

Монотонные отображения, лежащие в основе моделей динамического программирования	32
2.1. Обозначения и предположения	32
2.2. Постановка задачи	34
2.3. Применение к частным случаям	36
2.3.1. Детерминированное оптимальное управление (36). 2.3.2. Стохастическое оптимальное управление — счетное пространство возмущений (37). 2.3.3. Стохастическое оптимальное управление — формулировка с внешним интегралом (40). 2.3.4. Стохастическое оптимальное управление — мультипликативный функционал издержек (42). 2.3.5. Минимаксное управление (43).	

Глава 3

Модели с конечным горизонтом	44
3.1. Общие замечания и предположения	44
3.2. Основные результаты	45
3.3. Применение к частным случаям	50

Глава 4

Модели с бесконечным горизонтом в предположении сжимаемости	55
4.1. Общие замечания и предположения	55
4.2. Результаты о существовании и сходимости	55
4.3. Вычислительные методы	60
4.3.1. Последовательные приближения (60). 4.3.2. Итерация стратегий (64). 4.3.3. Математическое программирование (68).	
4.4. Применение к частным случаям	68

Глава 5

Модели с бесконечным горизонтом в предположении монотонности	70
5.1. Общие замечания и предположения	70
5.2. Уравнение оптимальности	71
5.3. Характеризация оптимальных стратегий	76
5.4. Сходимость алгоритма динамического программирования — существование стационарных оптимальных стратегий	78
5.5. Применение к частным случаям	85

Глава 6

Обобщенная абстрактная модель динамического программирования	87
6.1. Общие замечания и предположения	87
6.2. Анализ моделей с конечным горизонтом	90
6.3. Анализ моделей с бесконечным горизонтом в предположении сжимаемости	91

ЧАСТЬ II

ТЕОРИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Глава 7

Борелевские пространства и вероятностные меры на них	93
7.1. Обозначения	93
7.2. Метризуемые пространства	96
7.3. Борелевские пространства	107
7.4. Вероятностные меры на борелевских пространствах	112
7.4.1. Характеризация вероятностных мер (112). 7.4.2. Слабая топология (114). 7.4.3. Стохастические ядра (122). 7.4.4. Интегрирование (126).	
7.5. Полунепрерывные функции и измеримый по Борелю выбор	132
7.6. Аналитические множества	141
7.6.1. Эквивалентные определения аналитических множеств (141). 7.6.2. Свойства измеримости аналитических множеств (150). 7.6.3. Аналитическое множество вероятностных мер (153).	
7.7. Полуаналитические снизу функции и универсально измеримый выбор	154

Глава 8

Борелевская модель с конечным горизонтом	168
8.1. Модель	168
8.2. Алгоритм динамического программирования — существование оптимальных и ϵ -оптимальных стратегий	173
8.3. Полунепрерывные модели	187

Глава 9

Борелевские модели с бесконечным горизонтом	190
9.1. Стохастическая модель	190
9.2. Детерминированная модель	193
9.3. Связь между моделями	194
9.4. Уравнение оптимальности — характеризация оптимальных стратегий	200
9.5. Сходимость алгоритма динамического программирования — существование стационарных оптимальных стратегий	203
9.6. Существование ϵ -оптимальных стратегий	211

Глава 10

Модель с неполной информацией о состоянии	215
10.1. Сведение нестационарной модели к стационарной — расширение множества состояний	215

10.2. Сведение модели с неполной информацией к модели с полной информацией — достаточные статистики	219
10.3. Существование достаточных статистик	231
10.3.1. Фильтрация и условные распределения состояний (232). 10.3.2. Тожественные отображения (236).	

Глава 11

Некоторые частные вопросы	237
11.1. Предельно измеримые стратегии	237
11.2. Аналитически измеримые стратегии	240
11.3. Модели с мультипликативными издержками	241

Приложение А

Внешний интеграл	243
----------------------------	-----

Приложение Б

Дополнительные свойства измеримости борелевских пространств	249
Б.1. Доказательство предложения 7.35 (д)	249
Б.2. Доказательство предложения 7.16.	252
Б.3. Аналитическое множество, неизмеримое по Борелю	256
Б.4. Предельная σ -алгебра.	258
Б.5. Теоретико-множественные аспекты борелевских пространств	265

Приложение В

Хаусдорфова метрика и экспоненциальная топология	266
Список литературы	274
Предметный указатель	278

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Стимулами к расцвету какого-либо направления в математике могут быть как запросы естествознания, техники, экономики и разнообразных иных прикладных сфер деятельности, так и потребности самой математики, стремление решить трудные задачи либо иметь логически стройную, гармоничную картину определенного раздела этой науки. Вопросы математического программирования, оптимизации и управления вышли на передний план в математике наших дней в связи с нуждами таких приложений, как управление экономикой, регулирование работы автоматических технических устройств, распознавание сигналов или движущихся объектов и многие другие. Необходимость учета случайных колебаний экономической конъюнктуры, случайных нарушений технологических процессов, случайных отклонений при работе регулируемых автоматических механизмов и управляемых аппаратов и случайных флуктуаций и шумов в окружающей их среде, влияний случайных факторов во множестве других ситуаций форсировали создание после Второй мировой войны современных методов прогноза, фильтрации, контроля случайных процессов. Успехи теории случайных процессов вообще, теории стохастических дифференциальных уравнений и теории мартингалов в особенности, а также достижения примыкающих областей функционального анализа, теории функций, дифференциальных уравнений в частных производных позволили достичь значительного прогресса в разработке этих методов.

Теория управляемых случайных процессов или, как говорят в англоязычной литературе, стохастического оптимального управления существует немногим более двух десятилетий и продолжает оставаться интенсивно развивающейся дисциплиной. Ее основное назначение — дать ответ на следующий вопрос: каким образом в каждый момент времени выбирать управление (иными словами — принимать решение), зависящее от накопленной информации и влияющее на локальные вероятностные характеристики случайного процесса, с тем чтобы в итоге некоторый функционал от процесса и от управлений обратился в минимум (или максимум).

Помимо задачи об оптимальной остановке, имеющей свою специфику, наиболее изучен тот случай, когда управляемый процесс является локально марковским, а функционал — аддитивным. В задаче такого рода с полной информацией, рассуждая на интуитивном уровне, нетрудно написать уравнение Беллмана для цены модели (т.е. для минимального значения функционала), а отправляясь от уравнения Беллмана и его решения в принципе во многих случаях можно строить оптимальные либо ϵ -оптимальные стратегии.

Обоснование этого пути и вывод уравнения Беллмана, вообще говоря, являются достаточно трудной проблемой. Главный интерес как с прак-

тической точки зрения, так и в смысле преодоления трудностей представляют управляемые диффузионные процессы, изучению которых посвящена монография Н.В. Крылова [94]. К ним примыкают управляемые процессы, включающие наряду с диффузионной компонентой случайные скачки (серия работ Г. Прагараускаса, в период с [97] и до [98]), либо допускающие дополнительно импульсивное управление (см. Бен-суссан и Лионс [106]). Менее обстоятельное изложение управляемых диффузионных процессов, чем в фундаментальном труде Крылова, но более приспособленное для лиц, интересующихся прикладной стороной, можно найти в книге Флеминга и Ришела [115]. Своеобразный подход к общей теории управляемых случайных процессов, опирающийся на понятие стохастического управляемого объекта, предложен И.И. Гихманом и А.В. Скороходом [91]. Схемы с неполной информацией, пожалуй, еще более важные для практики, имеют свои отличия как в постановках задач, так и в методах решения; вопросы фильтрации и управления по неполным данным для процессов с непрерывным временем освещены в обширном труде Р.Ш. Липцера и А.Н. Ширяева [95]. Такова генеральная линия в стохастическом оптимальном управлении, тесно переплетающаяся со стохастическими дифференциальными уравнениями и теорией мартингалов, использующая далеко продвинутой математический аппарат и имеющая прочные связи с приложениями.

За те же примерно двадцать лет в стохастическом оптимальном управлении, наряду с отмеченной главной линией, сложилась, обособилась, приобрела характерные черты другая ветвь исследований, имеющая дело со схемами с дискретным временем, или приводящимися к дискретному времени. Не имея единого установившегося названия, более или менее широкие подразделения этой ветви именуются в литературе динамическим программированием, последовательными процессами принятия решений, оптимальным стохастическим управлением с дискретным временем, управляемыми случайными последовательностями, управляемыми цепями Маркова, марковскими процессами принятия решений, управляемыми марковскими моделями, марковским программированием. Сюда же относятся управляемые полумарковские модели и те управляемые скачкообразные случайные процессы с непрерывным временем, которые вполне определяются последовательно занумерованными скачками *). Указанному направлению принадлежит и предлагаемая в русском переводе книга Бертсекаса и Шрива "Стохастическое оптимальное управление. Случай дискретного времени".

В принципе численное решение задачи на ЭВМ требует приближения непрерывной модели дискретной схемой, и поэтому теория стохастического динамического программирования с дискретным временем должна была бы быть очень важной для приложений. Однако существующее ныне реальное положение вещей иное. Одно дело — составить уравнения задачи в непрерывном времени и затем решать их с помощью разностных методов, а другое — ставить саму задачу оптимизации в рамках дискретной модели. Второй метод при существующих алгоритмах нахождения оптимальных стратегий редко совместим с возможностями современных ЭВМ в случае действительно серьезных прикладных задач. Отметим, что среди участников прошедшей недавно в Манчестере международной конферен-

*) Такой неоднозначностью названий можно объяснить тот факт, что родственные по содержанию работы рассматриваемого направления попадают в разные рубрики одного и того же реферативного математического журнала. Это происходит и в РЖ Математика, и в Mathematical Reviews.

ции по марковским процессам решения [119] господствовало убеждение, что это основное препятствие на пути теории к применениям вскоре будет преодолено. Пока же рассматриваемая младшая ветвь теории стохастического управления развивается преимущественно "в себе самой", хотя и обнаруживает любопытные связи с казалось бы далекими разделами математики.

В случае дискретного времени и дискретных пространств состояний и решений в теории стохастического оптимального управления не возникает проблем обоснования, и здесь гораздо дальше, чем в моделях управляемой диффузии, продвинуто изучение вопросов, которые авторы книги называют структурными. Сюда относятся эффекты, обнаруживающиеся при переходе к бесконечному времени управления, когда уравнение Беллмана, вообще говоря, оказывается недостаточным для характеристики цены и построения оптимальных стратегий. Тогда выясняются различия между общими, положительными, отрицательными, сжимающими, дисконтированными моделями с точки зрения существования оптимальных либо ϵ -оптимальных стратегий того или иного класса: полумарковских, марковских, стационарных. Здесь в случае расходимости суммарных издержек, подробно исследован критерий средних издержек за единицу времени, при котором уравнение Беллмана заменяется системой спаренных уравнений оптимальности. Изучаются и другие критерии оптимальности, соотношения между ними, лексикографические критерии, неравномерно ϵ -оптимальные стратегии, алгоритмы нахождения оптимальных стратегий, модели специального вида и т.д.

В общем случае борелевских пространств состояний и управлений вывод уравнения Беллмана и получение из него оптимальных или ϵ -оптимальных стратегий требуют обоснования также и при дискретном времени. Здесь используется совсем другой аппарат, чем в управляемых диффузионных процессах, где уравнение Беллмана включает дифференциальный оператор второго порядка, и главная трудность состоит в установлении соответствующей гладкости цены. При дискретном времени уравнение Беллмана содержит интеграл цены, и сходную роль представляют проблемы измеримости цены и измеримого выбора. Они преодолеваются с привлечением теории аналитических множеств, основы которой были заложены в свое время П.С. Александровым, Н.Н. Лузиным и М.Я. Суслиным. Таким образом, спустя примерно 50 лет одна из казалось бы отвлеченнейших глав дескриптивной теории множеств находит себе применение в сравнительно близком к приложениям разделе математики. В промежуточном, так называемом полунепрерывном случае (где на элементы модели налагаются условия типа компактности и непрерывности), используются топологические результаты о непрерывных многозначных отображениях. В общем борелевском случае теория стохастического динамического программирования опирается также на принадлежащую К. Куратовскому [46] теорему об изоморфизме борелевских пространств и на доказанную Н.Н. Лузиным и В.Янковым [6] и независимо Дж. фон Нейманом [59] теорему об униформизации.

Первый период интенсивного изучения как структурных вопросов, так и проблем измеримости приходится на начало и середину 60-х годов. В то время исследования ведутся почти исключительно в США. Выделение описанного круга проблем в самостоятельный раздел теории стохастического управления происходит в трудах Р. Ховарда (первая элементарная монография по марковским процессам решения [43]), Д. Блекуэлла и связанных с ним авторов (постановка и первое разрешение вопросов измеримости, структурные проблемы [107, 16, 17, 83, 108]), Л. Дубинса

и Л. Сэвиджа (монография [111], в которой сходная проблематика трактуется в терминах "игорного дома", дается теория полунепрерывных моделей, для борьбы с неизмеримостью привлекаются нетрадиционные конечно-аддитивные меры). В работах ряда исследователей теория распространяется на полумарковские модели, средневременной и лексикографический критерии, цепи Маркова с непрерывным временем и, казалось, приближается к своему завершению. Однако с середины 70 годов начинается период "второй молодости", происходит дальнейший прогресс в проблемах измеримости, углубляется постановка структурных вопросов, вводятся и изучаются новые понятия оптимальности, расширяются классы анализируемых моделей и критериев. Помимо США, активные исследования разворачиваются в Англии, Нидерландах, Польше, СССР, ФРГ, Чехословакии, Японии и других странах, организуются международные конференции и семинары по динамическому программированию и марковским процессам решения [117, 112, 113, 119]. Выходит значительное количество книг, целиком или преимущественно посвященных рассматриваемой тематике: более элементарные руководства [27, 118, 120, 116, 12, 128], монографии, трактующие также вопросы обоснования и измеримости с отсылкой к работам по топологии и измеримому выбору [40] или в полном объеме ([1] и предлагаемая книга Бертсекаса и Шрива), книги с преимущественным вниманием к отдельным аспектам теории или моделям специального вида [109, 110, 42, 124, 123, 127, 125], в частности, к моделям с неполной информацией [85, 99].

Книга Бертсекаса и Шрива выделяется на этом фоне двумя основными моментами, отражающими вклад ее авторов в рассматриваемую проблематику и оправдывающими ее перевод на русский язык: 1) аксиоматически-операторным подходом к структурным проблемам динамического программирования и, главное, 2) систематическим использованием класса универсально измеримых стратегий в вопросах измеримости и измеримого выбора. Соответственно книга разделена на две практически независимые части.

В первой части анализируются не обремененные измеримостью относительно простые структурные вопросы, такие, как особенности положительных, отрицательных, сжимающих моделей, или сходимость методов последовательных приближений цены и усовершенствования стратегий. Оригинальность подхода состоит в том, что за первичное понятие принимается оператор переоценки издержек за один шаг, зависящий от управления. Его аналитический вид не конкретизируется, на оператор накладываются лишь условия монотонности и полуаддитивности и, в зависимости от типа модели, ограничения типа сжимаемости, непрерывности, знака модели и т.п. В качестве примеров рассматриваются операторы, отвечающие детерминированному или стохастическому динамическому программированию с аддитивными или мультипликативными издержками, а также многошаговым играм двух лиц с нулевой суммой. Многие структурные вопросы авторами не затрагиваются, поскольку не вменяются в принятую схему; например, не рассмотрен критерий средних издержек за один шаг. В стохастическом варианте вопросы измеримости снимаются за счет предположения о счетности пространства элементарных исходов либо замены общепринятого интеграла "внешним" интегралом (определенным для всех ограниченных функций, но лишенным счетной аддитивности).

Во второй части книги систематически с самых начальных понятий освещаются проблемы измеримости в марковских моделях динамического программирования блекуэлловского типа (в первую очередь однородных) с критерием суммарных издержек и связанные с ними вопросы

существования оптимальных или ϵ -оптимальных стратегий. Обстоятельное, с полными доказательствами изложение необходимых сведений о борелевских пространствах, аналитических множествах, универсальной измеримости, измеримом выборе, полунепрерывных функций занимает почти треть основного текста книги и имеет много пересечений с [1]. Трактовка Бертсекасом и Шривом вопросов измеримости содержит существенное продвижение вперед. Первоначальная теория Блекуэлл-Штрауха имела дело только с борелевски измеримыми стратегиями, и среди таких стратегий, вообще говоря, существовали не равномерно, а лишь почти всюду оптимальные или ϵ -оптимальные стратегии. В [1] приведены детальные доказательства этих результатов и используемых в них теорем измеримого выбора. В работе [20] Д. Блекуэлл, Д. Фридман и М. Оркин, ограничиваясь положительными моделями с конечным временем управления, перешли к более широкому классу аналитически измеримых стратегий, что позволило им установить существование равномерно ϵ -оптимальных стратегий. Бертсекас и Шрив делают следующий шаг, допуская ещё более обширный класс универсально измеримых стратегий, по-видимому, наиболее естественный с точки зрения завершенности результатов. Здесь становится возможным равномерно ϵ -оптимальный выбор, являющийся оптимальным на том множестве, где в операторе Беллмана достигается инфимум. Построения проводятся для моделей произвольного знака и бесконечного промежутка управления. Методической новинкой в доказательствах является используемый авторами прием сведения стохастических моделей к детерминированным.

Вторая часть книги содержит также теорию полунепрерывных моделей и общий метод приведения моделей с неполными данными к моделям с полной информацией. Оба вопроса (за исключением введенных Фридманом [32] полунепрерывных "с противоположной стороны" моделей, в которых существуют только ϵ -оптимальные стратегии) с отличиями в деталях представлены и в [1]. Следует отметить, что теория моделей с неполными данными вовсе не исчерпывается принципиальной возможностью сводить такие модели к случаю полной информации.

За годы, прошедшие с выхода в свет американского издания книги, теория стохастического оптимального управления с дискретным временем пополнилась новыми фактами и наблюдениями. Сколько-нибудь полно охватить их здесь не представляется возможным. Остановимся лишь на отдельных моментах, близких к содержанию или духу книги Бертсекаса и Шрива. Иное, чем в книге, обобщение структурных результатов о классических моделях Беллмана-Блекуэлл состоит в перенесении уравнения Беллмана, условия "выравнивания" Дубинса-Сэвиджа, понятия отрицательной модели и т.п. со случая аддитивных издержек на случай критерия, равного математическому ожиданию функционала общего вида от траектории и от последовательности решений. Например, М. Шел [121] установил, что если для любой стратегии выполняется условие "выравнивания", то модель является отрицательной. Им же в изящной операторной форме [122] и независимо И.И. Гихманом и А.В. Скороходом [91] показано, что теория полунепрерывных моделей обретает законченную форму (в виде теоремы о существовании оптимальных стратегий), если обычные топологические предположения налагать не на издержки на каждом шаге, а на функционал от всей траектории. Оба эти момента отражены в обзоре [104], где также в более широких пределах, нежели в книге Бертсекаса и Шрива, осуществлен переход от измеримости по Борелю к универсальной измеримости. В [104] изложен и ряд струк-

турных вопросов, содержащий оригинальные результаты Р.Я. Читашвили об описании всех решений уравнения Беллмана, о лексикографическом обобщении этого уравнения, восходящем к А.Ф. Вейно [126], о максимальном подмножестве состояний, на котором возможен стационарный оптимальный выбор управлений. Сводки прежних и более новых результатов о существовании ϵ -оптимальных стратегий приведены в обзоре А.Н. Ширяева [103] и статье Е.А. Файнберга [100]. Укажем далее начатый Е.Б. Фридом [4], продолженный Ван дер Валем [125] и развиваемый в последнее время Е.А. Файнбергом и И.М. Сониным [101], [114] новый подход, при котором рассматриваются ϵ -неравномерно оптимальные стратегии, и который позволяет с единой позиции увидеть особенности положительных и отрицательных моделей. Наконец, отметим, что техника аналитических и универсально измеримых множеств и соответствующих теорем измеримого выбора находит применение и в марковских процессах решения с непрерывным временем, приводящихся к последовательным скачкам [105, 129], и что наряду с Блекуэллом, Фридманом и Оркином [20] пионерская роль в широком использовании аналитических множеств и полуаналитических функций в задачах управления принадлежит А.К. Звонкину [92], имевшему дело с непрерывным временем.

Выходящая в русском переводе книга Бертсекаса и Шрива предназначена научным работникам — специалистам по вопросам оптимизации, теории управления, теории случайных процессов, равно как студентам старших курсов и аспирантам соответствующего профиля. Ее безусловно можно рекомендовать всем желающим ознакомиться с современными теоретическими основами оптимизации стохастических систем.

А.А. Юшкевич

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта монография является результатом исследований, которые проводились в Иллинойском университете в течение трехлетнего периода, начиная со второй половины 1974 г. Цель монографии состоит в том, чтобы дать унифицированную и математически строгую теорию широкого класса задач динамического программирования и стохастического оптимального управления с дискретным временем. Монография разделена на две части, которые можно читать независимо.

В части I содержится анализ моделей динамического программирования в рамках унифицированной схемы, применимой к детерминированному оптимальному управлению, стохастическому оптимальному управлению, минимаксному управлению, последовательным играм и другим областям. Здесь разрешаются *структурные вопросы*, связанные с такими задачами, т.е. приводятся результаты, справедливость которых следует исключительно из последовательностного характера задачи. Такие результаты справедливы для моделей, в которых не приходится заботиться об измеримости, например в детерминированных задачах и стохастических задачах со счетным вероятностным пространством.

Исходной точкой анализа служит отображение, определяющее алгоритм динамического программирования. В терминах этого отображения ставится единственная абстрактная задача и для нее выводятся аналоги почти всех известных результатов детерминированного оптимального управления. Кроме того, в этой части вводится в рассмотрение новая задача стохастического оптимального управления, основанная на использовании внешнего интеграла. Эта модель широко применима и не нуждается ни в каких топологических предположениях. Мы показываем, что все результаты, полученные в части I, остаются справедливыми и для этой модели.

В части II разрешаются вопросы измеримости, относящиеся к задачам стохастического оптимального управления с полной и неполной информацией о состояниях. Эти вопросы изучались на протяжении последних пятнадцати лет многими специалистами в области статистики и теории управления. Как мы объясняем в главе 1, использовавшиеся до сих пор подходы либо ограничены стеснительными предположениями типа компактности и непрерывности, либо недостаточно мощны для получения таких же сильных результатов, какие имеются для их структурных аналогов. Эти недостатки проявляются в том, что класс рассматриваемых стратегий оказывается недостаточно широк, чтобы было обеспечено существование оптимальных или ϵ -оптимальных всюду стратегий без стеснительных предположений. Мы в своей работе расширяем пространство допустимых стратегий так, чтобы оно включало в себя универсально измеримые стратегии. Это гарантирует существование ϵ -оптимальных стратегий и впервые позволяет

развить общую и глубокую теорию, столь же мощную, как ее детерминированный аналог.

Отметим, однако, что класс универсально измеримых стратегий не является наименьшим классом стратегий, для которого справедливы эти результаты. Таким наименьшим классом является класс предельно измеримых стратегий, рассмотренный в разделе 11.1. При этом σ -алгебра предельно измеримых множеств (или C -множеств) определяется конструктивно с использованием трансфинитной индукции, что с точки зрения теории множеств более удовлетворительно, чем определение универсальной σ -алгебры. Однако мы полагаем, что большинство читателей найдут более понятными универсальную σ -алгебру и методы, доказательства, связанные с ней, и поэтому основное место в части II уделяем моделям с универсально измеримыми стратегиями.

Части I и II связаны друг с другом и дополняют друг друга. Часть II широко использует результаты части I. Однако та специальная форма, в которой результаты части I нужны для части II, имеется и в других источниках (например, в [12]). Всякий раз, когда мы используем такой результат, мы ссылаемся как на часть I, так и на работу Бертсекаса [12], поэтому часть II можно читать независимо от части I. Результаты, развитые в части II, показывают, что задачи стохастического оптимального управления с ограничениями на измеримость допустимых стратегий могут быть вложены в схему части I, что демонстрирует широту сферы приложения приведенной там постановки.

Монография предназначена для специалистов в области прикладной математики, статистики, для инженеров с математическим уклоном, для лиц, занимающихся исследованием операций и работающих в близких областях. Мы везде предполагали, что читатель знаком с основными понятиями теории меры и топологии. В остальном предварительных знаний не требуется. В частности, мы излагаем с полными доказательствами нужные нам сведения о борелевских пространствах и аналитических множествах.

Это исследование было начато, когда оба автора работали в координатной научной лаборатории Иллинойского университета, и завершилось, когда Шрив работал на факультете математики и статистики Калифорнийского университета в Беркли. Мы благодарны этим учреждениям за поддержку и атмосферу, способствовавшую нашей работе. Мы также благодарны Национальному научному фонду за финансирование исследований. Мы хотим поблагодарить за помощь Джозефа Дуба, который направлял нас при работе с литературой по аналитическим множествам, и Джона Аддисона, который указал на существующие работы по предельной σ -алгебре. Мы особенно обязаны Давиду Блекуэллу, который вдохновил нас своей пионерской работой по динамическому программированию в борелевских пространствах, поддерживал нас, когда мы продолжали свои собственные исследования, и показал нам пример 9.2. Глава 9 представляет собой расширенный вариант нашей статьи "Универсально измеримые стратегии в динамическом программировании", опубликованной в журнале "Mathematics and Operations Research". Мы благодарны Институту проблем управления за разрешение на включение этого материала в монографию. Наконец, мы хотим поблагодарить Розу Харрис и Ди Разер за прекрасную перепечатку рукописи.

Д.Бертсекас, С.Шрив

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Структура моделей последовательного принятия решений

Модели последовательного принятия решений представляют собой математические абстракции таких ситуаций, в которых решения должны приниматься в несколько шагов, причем каждый шаг влечет за собой определенные издержки. Каждое решение может оказывать влияние на условия, при которых будут приниматься будущие решения, так что если требуется минимизировать суммарные издержки, то нужно уравнивать желание минимизировать издержки от принимаемого в настоящий момент решения с желанием исключить в будущем такие ситуации, в которых будут неизбежны большие издержки.

Классическим примером такой ситуации (в которой доход мы трактуем как отрицательные издержки) является управление портфелем ценных бумаг. Вкладчик должен уравнивать свое желание добиться дохода сразу, например, в виде дивидендов, с желанием избегать вложений в отрасли, где можно ожидать относительного застоя. Другие примеры можно привести из области управления запасами, контроля за водохранилищами, последовательного анализа, проверки гипотез, а также управления всевозможными физическими системами, подверженными воздействию случайных возмущений, если дискретизировать задачи с непрерывным временем. Большое количество моделей последовательного принятия решений читатель найдет в монографиях Беллмана [9], Бертсекаса [12], Дынкина и Юшкевича [1], Ховарда [43], Вальда [89], а также в источниках, на которые ссылаются перечисленные авторы.

Динамическое программирование (ДП) много лет служило основным методом анализа многочисленных и разнообразных задач последовательного принятия решений. В качестве примеров можно привести задачи детерминированного и стохастического оптимального управления, марковские и полумарковские задачи принятия решений, минимаксные задачи управления и многошаговые игры. Несмотря на то, что природа этих задач весьма различна, в своей основе они, оказывается, имеют во многом общую структуру. Во всех случаях издержки, соответствующие стратегии, и основная процедура алгоритма ДП могут быть описаны с помощью определенного оператора, который в применении к той или иной задаче изменяется лишь в деталях, в значительной мере несущественных. Как правило, этот оператор вбирает в себя все данные задачи и позволяет найти все величины, представляющие интерес для исследователя. В задачах с конечным числом шагов этот оператор позволяет получить оптимальную функцию издержек и найти оптимальную или ϵ -оптимальную стратегию за конечное число шагов алгоритма ДП. В задачах с бесконечным числом шагов можно надеяться, что последовательность функций, порождаемая итерациями алгоритма ДП, сходится в некотором смысле к оптимальной функции издержек

рассматриваемой задачи. Более того, все основные результаты аналитического и вычислительного характера могут быть сформулированы в терминах основного оператора, определяющего алгоритм ДП. Таким образом, приняв этот оператор за отправную точку, можно получить сильные аналитические результаты, которые применимы к большому числу задач последовательно-го принятия решений.

Чтобы проиллюстрировать нашу точку зрения, рассмотрим формально задачу детерминированного оптимального управления, которая формулируется следующим образом: имеется функционирующая в дискретном времени система, описываемая уравнением

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k),$$

где x_k и x_{k+1} представляют собой соответственно текущее и следующее за ним состояние, принадлежащие некоторому пространству состояний S ; u_k представляет собой текущее управление, выбираемое лицом, принимающим решения, из множества ограничений $U(x_k)$, которое в свою очередь является подмножеством некоторого пространства управлений C . Издержки, возникающие на k -м шаге задаются функцией $g(x_k, u_k)$. Будем искать конечную последовательность функций управления $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ (называемую также *стратегией*), которая минимизирует суммарные издержки за N шагов. Функции μ_k отображают S в C и должны удовлетворять условию $\mu_k(x) \in U(x)$ для всех $x \in S$. Каждая функция μ_k определяет управление $u_k = \mu_k(x_k)$, выбираемое на k -м шаге при достижении состояния x_k . Таким образом, суммарные издержки, соответствующие стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ и начальному состоянию x_0 , равны

$$J_{N,\pi}(x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} g[x_k, \mu_k(x_k)], \quad (2)$$

где состояния $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ порождаются начальным состоянием x_0 и стратегией π посредством уравнения системы

$$x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k)], \quad (3)$$

$$k = 0, \dots, N-2.$$

Каждому начальному состоянию x_0 и стратегии π соответствует последовательность управлений $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$, где $u_k = \mu_k(x_k)$ и x_k задаются формулой (3). Таким образом, возможна иная формулировка задачи, состоящая в выборе последовательности управлений, минимизирующей $\sum_{k=0}^{N-1} g(x_k, u_k)$, а не стратегии π , минимизирующей $J_{N,\pi}(x_0)$. Приведенная первоначально формулировка ближе к тому подходу ДП, с которым мы будем работать в дальнейшем.

Как хорошо известно, алгоритм ДП для сформулированной выше задачи задается уравнениями

$$J_0(x) = 0, \quad (4)$$

$$J_{k+1}(x) = \inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + J_k[f(x, u)]\}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (5)$$

причем оптимальная функция издержек $J^*(x_0)$ данной задачи получается на N -м шаге, т.е.

$$J^*(x_0) = \inf_{\pi} J_{N,\pi}(x_0) = J_N(x_0).$$

Значение функции $J_{N,\pi}(x_0)$, соответствующее любой стратегии $\pi =$

$= (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$, можно также получить на N -м шаге алгоритма

$$J_{0,\pi}(x) = 0, \quad (6)$$

$$J_{k+1,\pi}(x) = g[x, \mu_{N-k-1}(x) + J_{k,\pi}[f(x, \mu_{N-k-1}(x))]], \quad (7)$$

$$k = 0, \dots, N-1.$$

Теперь можно сформулировать первоначальную задачу, а также описать алгоритм ДП (4), (5) с помощью отображения H , определенного формулой

$$H(x, u, J) = g(x, u) + J[f(x, u)]. \quad (8)$$

Определим оператор T следующим образом:

$$T(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J), \quad (9)$$

и для любой функции $\mu: S \rightarrow C$ определим оператор T_μ как

$$T_\mu(J)(x) = H[x, \mu(x), J]. \quad (10)$$

Оба оператора T и T_μ отображают множество функций, принимающих действительные значения (или, быть может, также значения из $[-\infty, +\infty]$) на S в себя. Тогда в силу уравнений (6), (7) можно записать функцию издержек $J_{N,\pi}(x_0)$, определяемую формулой (2), в виде

$$J_{N,\pi}(x_0) = (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x_0), \quad (11)$$

где J_0 представляет собой нулевую функцию на множестве S [$J_0(x) = 0 \forall x \in S$], а $(T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})$ обозначает суперпозицию операторов $T_{\mu_0}, T_{\mu_1}, \dots, T_{\mu_{N-1}}$. Аналогично алгоритм ДП может быть записан как

$$J_{k+1}(x) = T(J_k)(x), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (12)$$

откуда получаем, что

$$\inf_{\pi} J_{N,\pi}(x_0) = T^N(J_0)(x_0),$$

где T^N есть N -кратное произведение оператора T на себя. Таким образом, *и сама задача, и основной алгоритм могут быть сформулированы в терминах операторов T и T_μ .*

Можно рассмотреть и другой вариант той же задачи — с бесконечным горизонтом, когда ищется последовательность $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$, которая минимизирует величину

$$\begin{aligned} J_\pi(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} g[x_k, \mu_k(x_k)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x_0) \end{aligned} \quad (13)$$

при условии, что выполняются ограничения (3). В этом случае нужно, безусловно, сделать предположения, которые обеспечивают существование предела в выражении (13) при любых π и x_0 . При соответствующих предположениях можно показать, что оптимальная функция издержек, определяемая формулой

$$J^*(x) = \inf_{\pi} J_\pi(x),$$

удовлетворяет следующему функциональному уравнению Беллмана:

$$J^*(x) = \inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + J^*[f(x, u)]\}.$$

Это уравнение эквивалентно равенству

$$J^*(x) = T(J^*)(x) \quad \forall x \in S,$$

показывающему, что функция J^* является неподвижной точкой оператора T . Большинство результатов, относящихся к случаю бесконечного горизонта и представляющих аналитический интерес, примыкают к этому уравнению.

Другие вопросы связаны с существованием и характеристикой оптимальных или почти оптимальных стратегий и со справедливостью соотношения

$$J^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} T^N(J_0)(x) \quad \forall x \in S, \quad (14)$$

которое говорит о том, что алгоритм ДП дает в пределе оптимальную функцию издержек данной задачи. И в этом случае как задача, так и основные относящиеся к ней аналитические и вычислительные результаты могут быть сформулированы в терминах операторов T и T_μ .

Детерминированная задача оптимального управления, описанная выше, является типичной среди представляющих практический интерес задач последовательного принятия решений, которые могут быть сформулированы в терминах отображений, аналогичных отображению H из формулы (8). Как будет показано в главе 2, таким же образом можно сформулировать задачи стохастического оптимального управления, минимаксного управления и другие задачи. *Цель части I книги состоит в том, чтобы изложить все эти задачи с единой аналитической точки зрения и получить в широко применяемой форме все результаты, справедливость которых вытекает исключительно из основной последовательной структуры процесса принятия решений.* Это достигается тем, что за исходную точку берется отображение H такое, как в формуле (8), и все основные результаты выводятся в обобщенной форме. Затем эти результаты прилагаются к пяти частным моделям, описанным в разделе 2.3: детерминированным задачам оптимального управления; трем типам задач стохастического оптимального управления (счетное пространство возмущений, подход с использованием внешнего интеграла и мультипликативный функционал издержек) и задачам минимаксного управления.

1.2. Задачи стохастического оптимального управления с дискретным временем: вопросы измеримости

Теоретические построения части I недостаточны для того, чтобы обеспечить полный анализ задач стохастического оптимального управления, рассмотрение которых является основной целью этой книги. Дело в том, что когда такие задачи формулируются на несчетных вероятностных пространствах, то на допустимые стратегии должны быть наложены нетривиальные ограничения измеримости (или нужно обращаться к понятию внешнего интеграла).

Задача стохастического оптимального управления с дискретным временем получается из детерминированной задачи, описанной в предыдущем разделе, когда в описании системы присутствует случайное возмущение w_k . При этом уравнение (1) заменяется на уравнение

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \quad (15)$$

и функция издержек за один шаг принимает вид $g(x_k, u_k, w_k)$. Возмущение w_k является элементом некоторого вероятностного пространства (W, F) и имеет распределение $p(dw_k | x_k, u_k)$. Таким образом, управление u_k оказы-

вает влияние на переход из состояния x_k в состояние x_{k+1} дважды: один раз в уравнении системы (15) и еще раз как параметр в распределении возмущения w_k . Аналогично управление влияет и на издержки с двух сторон.

Некоторая избыточность такой модели уравнения системы будет исключена в главе 8, где будут введены ядро переходов из состояния в состояние и приведенная одношаговая функция издержек, и, таким образом, будет осуществлен переход к модели, принятой в литературе по статистике (см., например, Блекуэлл [17], Штраух [83]). В инженерной литературе чаще встречается более общая форма уравнения системы, которая более удобна для приложений, и поэтому выберем ее в качестве отправной точки.

Ядро переходов из состояния в состояние и одношаговая функция издержек представляют собой технические средства, которые исключают из рассмотрения пространство возмущений (W, F) и делают модель более пригодной для анализа. Покажем сначала, как свойства первоначальной системы переносятся на свойства ядра переходов из состояния в состояние и одношаговой функции издержек (см. ниже замечания, сопровождающие определения 8.1 и 8.8).

Задача стохастического оптимального управления отличается от своего детерминированного аналога тогда, когда становится известной информация. При детерминированном управлении каждому начальному состоянию и каждой стратегии соответствует последовательность управлений $(u_0, \dots, u_{N-1})$, которая может быть определена заранее, а получающиеся затем состояния системы определяются с помощью уравнения (1). В отличие от этого, в стохастической системе при заранее выбранных управлениях лицо, принимающее решения, может обнаружить в процессе эволюции системы, что появились нежелательные состояния и что выбранные управления больше не подходят. Поэтому приходится рассматривать стратегии $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$, где μ_k задает управление как функцию от прошлого.

Если x_0 — начальное состояние, то за первое управление берется $u_0 = \mu_0(x_0)$. Если наблюдались состояния и управления $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$, то затем выбирается управление

$$u_k = \mu_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k). \quad (16)$$

Мы требуем, чтобы управления удовлетворяли ограничениям

$$\mu_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k) \in U(x_k)$$

для любой истории $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ и всех k . Таким образом, лицо, принимающее решения, на каждом шаге использует всю доступную ему информацию.

Лицо, принимающее решения, вместо последовательности управлений выбирает стратегию, которая минимизирует суммарные средние издержки, связанные с работой системы. Мы покажем, что в большинстве случаев на самом деле достаточно рассматривать только *марковские стратегии*, т.е. те стратегии, для которых соответствующие управления u_k зависят только от текущего состояния x_k , а не от всей истории $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$. Именно с этим типом стратегий мы имели дело в разделе 1.1.

Обрисованный здесь анализ стохастической модели принятия решений может быть довольно хорошо разделен на две категории — *структурные вопросы* и *вопросы измеримости*. Структурный анализ включает в себя результаты, которые можно получить, не задумываясь об измеримости встречающихся функций и множеств, например, если модель детерминированная или, в общем случае, пространство возмущений W счетно. В час-

ти I книги структурные результаты выводятся с использованием отображения H и операторов T_μ и T типа тех, что были рассмотрены в предыдущем разделе. Анализ вопросов измеримости имеет своей целью показать, что структурные результаты остаются справедливыми и тогда, когда на множество допустимых стратегий налагаются нетривиальные ограничения измеримости. В части II книги основные усилия направлены на анализ вопросов измеримости, непосредственно связанных со структурными результатами, полученными в части I и в других источниках (см. Бертсекас [12]).

Эта дихотомия анализа может быть хорошо проиллюстрирована на примере алгоритма ДП для случая конечного горизонта, рассмотренного Беллманом [9]:

$$J_0(x) = 0, \quad (17)$$

$$J_{k+1}(x) = \inf_{u \in U(x)} E\{g(x, u, w) + J_k[f(x, u, w)]\}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (18)$$

где математическое ожидание берется по мере $p(dw | x, u)$. Это — стохастический двойник детерминированного алгоритма ДП (4), (5).

Разумно ожидать, что $J_k(x)$ представляет собой оптимальные издержки, связанные с функционированием системы, за k шагов, когда x является начальным состоянием, а также что если инфимум в соотношении (18) достигается при $u = \mu_k(x)$ для любого x и $k = 0, \dots, N-1$, то стратегия $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ является оптимальной для любого состояния x . Если не возникают вопросы измеримости, то (как будет показано в главе 3) это в самом деле верно при весьма слабых предположениях. Однако главное состоит в том, чтобы правильно сформулировать задачу стохастического управления и показать, что алгоритм ДП (17), (18) имеет смысл с точки зрения теории меры.

Одна из трудностей состоит в показе того, что выражение в фигурных скобках в уравнении (18) измеримо в некотором смысле. Таким образом, мы должны установить свойства измеримости для функций J_k . Другой связанный с этим вопрос заключается в необходимости совместить измеримость стратегий (нужную для того, чтобы можно было определить средние ожидаемые издержки при данной стратегии) с желанием осуществлять выбор в уравнении (18) в точке инфимума или вблизи этой точки. Проиллюстрируем эти трудности на простом двухшаговом примере.

Двухшаговая задача. Рассмотрим следующую последовательность событий:

(а) Генерируется начальное состояние $x_0 \in R$ (R представляет собой действительную прямую).

(б) При условии, что известно x_0 , принимающий решение выбирает управление $u_0 \in R$.

(в) В соответствии с известной вероятностной мерой $p(dx_1 | x_0, u_0)$ на B_R — борелевских подмножествах, зависящей от x_0 и u_0 , образуется состояние $x_1 \in R$. [В терминах нашей более ранней модели это соответствует уравнению системы вида $x_1 = w_0$ и $p(dw_0 | x_0, u_0) = p(dx_1 | x_0, u_0)$.]

(г) При известном состоянии x_1 принимающий решение выбирает управление $u_1 \in R$.

При заданной вероятностной мере $p(dx_1 | x_0, u_0)$ для любой пары $(x_0, u_0) \in R^2$ и функции $g: R^2 \rightarrow R$ задача заключается в нахождении стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1)$, состоящей из двух функций $\mu_0: R \rightarrow R$ и $\mu_1: R \rightarrow R$, которая минимизирует функционал

$$J_\pi(x_0) = \int g[x_1, \mu_1(x_1)] p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)). \quad (19)$$

Временно мы отложим дискуссию об ограничениях (если таковые есть), которые должны быть наложены на функции g , μ_0 и μ_1 для того, чтобы интеграл в (19) был вполне определен. В терминах нашей ранее описанной модели функция g задает издержки на втором шаге; считаем, что на первом шаге издержки отсутствуют.

Алгоритм ДП применительно к данной задаче имеет вид

$$J_1(x_1) = \inf_{u_1} g(x_1, u_1), \quad (20)$$

$$J_2(x_0) = \inf_{u_0} \int J_1(x_1) p(dx_1 | x_0, u_0), \quad (21)$$

и если предположить, что выполняются неравенства $J_2(x_0) > -\infty$, $J_1(x_1) > -\infty$ для всех $x_0 \in R$, $x_1 \in R$, то можно ожидать, что справедливы следующие результаты:

Р.1. Имеет место равенство

$$J_2(x_0) = \inf_{\pi} J_{\pi}(x_0) \quad \forall x_0 \in R.$$

Р.2. Для любого числа $\epsilon > 0$ существует (всюду) ϵ -оптимальная стратегия, т.е. стратегия π_{ϵ} такая, что

$$J_{\pi_{\epsilon}}(x_0) \leq \inf_{\pi} J_{\pi}(x_0) + \epsilon \quad \forall x_0 \in R.$$

Р.3. Если инфимум в выражениях (20) и (21) достигается для всех $x_1 \in R$ и $x_0 \in R$, то существует стратегия, которая является оптимальной для любого $x_0 \in R$.

Р.4. Если функции $\mu_1^*(x_1)$ и $\mu_0^*(x_0)$ доставляют инфимум соответственно в (20) и (21) для всех $x_1 \in R$ и $x_0 \in R$, то стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*)$ оптимальна для любого $x_0 \in R$, т.е.

$$J_{\pi^*}(x_0) = \inf_{\pi} J_{\pi}(x_0) \quad \forall x_0 \in R.$$

Формальный вывод утверждения Р.1 состоит из следующих шагов:

$$\inf_{\pi} J_{\pi}(x_0) = \inf_{\mu_0} \inf_{\mu_1} \int g(x_1, \mu_1(x_1)) p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)) = \quad (22a)$$

$$= \inf_{\mu_0} \int \{ \inf_{u_1} g(x_1, u_1) \} p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)) = \quad (22b)$$

$$= \inf_{\mu_0} \int J_1(x_1) p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)) = \inf_{u_0} \int J_1(x_1) p(dx_1 | x_0, u_0) = J_2(x_0).$$

Аналогичные формальные выводы могут быть сделаны для утверждений Р.2, Р.3 и Р.4.

Для того чтобы сделать предшествующий вывод осмысленным и математически строгим, необходимо дать обоснование следующим двум фактам.

(а) В соотношении (22a) функции g и μ_1 должны быть такими, чтобы функцию $g[x_1, \mu_1(x_1)]$ можно было интегрировать во вполне определенном смысле.

(б) В соотношении (22b) перестановка операций взятия инфимума и интегрирования должна быть законной. Кроме того, функция g должна быть такой, чтобы функцию $J_1(x_1) [= \inf_{u_1} g(x_1, u_1)]$ можно было интегрировать во вполне определенном смысле.

Вначале заметим, что если для каждой пары (x_0, u_0) мера $p(dx_1 | x_0, u_0)$ имеет счетный носитель, т.е. сосредоточена на счетном числе точек, то интеграл в соотношениях (22a) и (22b) сводится к бесконечной сумме. Таким образом, нет необходимости в том, чтобы налагать ограничения на измеримость функций g , μ_0 и μ_1 , а изменение порядка в операциях взятия

инфимума и интегрирования в соотношении (22б) оправдано, если предположить, что $\inf_{u_1} g(x_1, u_1) > -\infty$ для всех $x_1 \in R$. (Для любого числа $\epsilon > 0$ выберем функцию $\mu_\epsilon: R \rightarrow R$ такую, что

$$g(x_1, \mu_\epsilon(x_1)) \leq \inf_{u_1} g(x_1, u_1) + \epsilon \quad \forall x_1 \in R. \quad (23)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{\mu_1} \int g[x_1, \mu_1(x_1)] p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)) &\leq \int g[x_1, \mu_\epsilon(x_1)] p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)) \leq \\ &\leq \int \inf_{u_1} g(x_1, u_1) p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)) + \epsilon. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как число $\epsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \inf_{\mu_1} \int g[x_1, \mu_1(x_1)] p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)) &\leq \\ &\leq \int \{ \inf_{u_1} g(x_1, u_1) \} p(dx_1 | x_0, \mu_0(x_0)). \end{aligned}$$

Неравенство противоположного знака очевидно; отсюда следует нужный результат.) Аналогичные рассуждения доказывают утверждение Р.2, а утверждения Р.3 и Р.4 тривиальны, если принять во внимание, что нет ограничений на измеримость функций μ_0 и μ_1 .

Если мера $p(dx_1 | x_0, u_0)$ не имеет счетного носителя, то существуют два основных подхода. Первый состоит в том, чтобы расширить понятие интеграла, а второй — в наложении на функции g , μ_0 и μ_1 ограничений, обеспечивающих измеримость в нужном смысле. Такое расширение понятия интеграла может быть достигнуто, если интерпретировать интегралы в равенствах (22а) и (22б) как внешние интегралы (см. приложение А). Так как внешний интеграл может быть определен для любой функции, измеримой или нет, то нет необходимости требовать, чтобы функции g , μ_0 и μ_1 были измеримы в каком-либо смысле. В результате равенства (22а) и (22б) приобретают смысл и проходят доказательство, подобное тому, которое начинается с неравенства (23). Этот подход подробно обсуждается в части I, где показывается, что все основные результаты для задач с конечным и бесконечным горизонтом с полной информацией о состояниях доводятся до конца в рамках теории внешнего интеграла. Однако этому подходу присущи свои ограничения, связанные с особенностями аппарата внешнего интеграла. Трудности возникают также при использовании достаточных статистик в моделях с неполной информацией.

Разработка другого основного подхода в общей форме была начата Блекуэллом [17] в 1965 г. В этом подходе с самого начала предполагают, что функция g измерима по Борелю и, кроме того, для любого множества $B \in B_R$ (B_R есть борелевская σ -алгебра в R), функция $p(B | x_0, u_0)$ измерима по Борелю по (x_0, u_0) . Вначале при исследовании задачи от функций μ_0 и μ_1 требовалась измеримость по Борелю. В этих предположениях функция $g[x_1, \mu_1(x_1)]$ измерима по Борелю по x_1 , когда μ_1 является измеримой по Борелю, а интеграл в равенстве (22а) вполне определен.

Главная трудность возникает при рассмотрении равенства (22б), так как не обязательно функция

$$J_1(x_1) = \inf_{u_1} g(x_1, u_1)$$

измерима по Борелю, даже если этим свойством обладает функция g . Причина кроется в том факте, что ортогональная проекция борелевского множества из R^2 на одну из осей не обязательно должна быть измеримой

по Борелю (см. раздел 7.6). Так как для $c \in R$ имеем

$$\{x_1 \mid J_1(x_1) < c\} = \text{proj}_{x_1} \{(x_1, u_1) \mid g(x_1, u_1) < c\},$$

где proj_{x_1} обозначает проекцию на ось x_1 , то можно увидеть, что множество

$\{x_1 \mid J_1(x_1) < c\}$ не обязательно должно быть борелевским, даже если множество $\{(x_1, u_1) \mid g(x_1, u_1) < c\}$ является таковым. Трудности могут быть частично преодолены, если показать, что функция J_1 является полуаналитической снизу, а следовательно, также и универсально измеримой (см. раздел 7.7). Таким образом, функция J_1 может интегрироваться по любой вероятностной мере на B_R .

Другие затруднения связаны с тем, что вообще нельзя найти измеримый по Борелю ϵ -оптимальный селектор μ_ϵ , удовлетворяющий неравенству (23), хотя известен более слабый результат, заключающийся в том, что для любой вероятностной меры p на B_R может быть установлено существование измеримого по Борелю селектора μ_ϵ , удовлетворяющего неравенству

$$g[x_1, \mu_\epsilon(x_1)] \leq \inf_{u_1} g(x_1, u_1) + \epsilon$$

для почти всех $x_1 \in R$ по мере p . Этот результат достаточен для обоснования неравенства (24) и, таким образом, для доказательства результата Р.1 ($J_2 = \inf_{\pi} J_{\pi}$). Несмотря на это, результаты Р.2 и Р.3 не могут быть доказаны

в случае, когда от функций μ_0 и μ_1 требуется измеримость по Борелю, а могут быть доказаны лишь в более слабой форме, использующей понятие p -оптимальности (см. [83, 40]).

Цель части II состоит в разрешении вопросов измеримости в стохастическом оптимальном управлении таким образом, чтобы почти каждый результат мог быть доказан так же строго, как и соответствующий результат его структурного аналога. Это достигается путем расширения множества допустимых стратегий за счет включения в него всех универсально измеримых стратегий. В частности, мы показываем существование внутри этого класса стратегий, которые являются оптимальными или почти оптимальными для любого начального состояния.

Вопросами измеримости в теории стохастического оптимального управления занималось большое число авторов. Опишем здесь три принятых подхода и покажем, как их цели и результаты относятся к нашим собственным. Четвертый подход, принадлежащий Блекуэллу и др. [20] и базирующийся на аналитически измеримых стратегиях, рассматривается в следующем разделе и в разделе 11.2.

1. **Общая модель.** Если пространства состояний, управлений и возмущений являются произвольными пространствами с мерой, то сделано может быть очень мало. Одной из попыток в этом направлении является работа Штрибель [85], в которой используется понятие p -существенных инфимумов. Чтобы алгоритм динамического программирования имел смысл в этой работе, уравнение (18) заменяется на уравнение

$$J_{k+1}(x) = p\text{-существенный инф}_{\mu} E \{ g(x, \mu(x), w) + J_k(f(x, \mu(x), w)) \}, \quad (25)$$

$k = 0, \dots, N-1$, где p -существенный инфимум берется по всем измеримым функциям μ , отображающим пространство состояний S в пространство управлений C и удовлетворяющим любому предположенному ограничению. Функции J_k измеримы, и если вероятностные меры $p_0, \dots, p_{N-1}$ выбраны

правильно и имеет место так называемое *свойство счетной ϵ -решетчатости*, то модифицированный алгоритм динамического программирования порождает оптимальную функцию издержек и может быть использован для получения стратегий, которые являются оптимальными или почти оптимальными для почти всех по мере p_{N-1} начальных состояний. Однако выбор подходящих вероятностных мер $p_0, \dots, p_{N-1}$ так же труден, как реализация алгоритма динамического программирования, а проверка свойства счетной ϵ -решетчатости эквивалентна доказательству существования ϵ -оптимальной стратегии.

2. Полунепрерывные модели. Значительное внимание уделялось моделям, в которых пространства состояний и управлений являются борелевскими или даже пространством R^n , и приведенная функция издержек

$$h(x, u) = \int g(x, u, w) p(dw | x, u)$$

обладает свойствами полунепрерывности и/или выпуклости. Сопутствующим является предположение о том, что отображение $x \rightarrow U(x)$ является измеримой многозначной функцией с замкнутой областью значений [67]. В последнем случае существует измеримый по Борелю селектор $\mu: S \rightarrow C$ такой, что $\mu(x) \in U(x)$ для любого состояния x (Куратовский и Риль-Нарджевский [49]). Это, конечно, необходимо для существования какой-нибудь измеримой по Борелю стратегии.

Основной факт, имеющий отношение к моделям этого типа, состоит в том, что при различных комбинациях предположений полунепрерывности и компактности функции J_k , определенные соотношениями (17), (18), являются полунепрерывными. К тому же часто можно показать, что инфимум в соотношении (18) достигается для любых x и k , и существуют измеримые по Борелю селекторы $\mu_0, \dots, \mu_{N-1}$ такие, что $\mu_k(x)$ доставляет этот инфимум (Фридман [32], Фурукава [33], Химмельберг и др. [39], Мантра [55], Шел [73] и ссылки, содержащиеся в них). Такая стратегия является оптимальной и ее существование — это дополнительный выигрыш от топологических условий, налагаемых для того, чтобы задача была вполне определена. В разделе 9.5 мы покажем, что условия полунепрерывности снизу и компактности гарантируют сходимость алгоритма динамического программирования в случае бесконечного горизонта к оптимальной функции издержек, а также что этот алгоритм может использоваться для получения оптимальной стационарной стратегии.

Предположения непрерывности и компактности являются общими для многих работ, посвященных стохастическому программированию. Эти работы отличаются от нашей книги как целями, так и структурой. Во-первых, в обычной модели стохастического программирования управления не могут влиять на распределение будущих состояний (Олсен [60–62], Рокафеллар и Ветс [68, 69] и ссылки, содержащиеся в них). Вследствие этого модель не включает, как частные случаи, многие важные задачи, такие, как например, классическая задача линейного квадратичного стохастического управления [12, раздел 3.1]. Во-вторых, предположения о выпуклости, полунепрерывности снизу или и то, и другое вместе делаются по отношению к функции издержек, модель подгоняется под теорему Куратовского–Риль-Нарджевского об измеримом выборе, а анализ осуществляется в конечномерном евклидовом пространстве состояний. И все это делается ради преодоления трудностей, связанных с измеримостью. Результаты с трудом обобщаются на случаи, когда приходится выходить за рамки евклидовых пространств (Рокафеллар [67]). В указанных работах делается упор на результаты, типичные для выпуклого программирования, т.е. на двойствен-

ность и условия оптимальности Куна—Таккера, а поэтому в них рассматривается узкий класс задач и получаются сильные результаты.

3. Борелевские модели. Подход с борелевской измеримостью был введен Блекуэллом [17] и усовершенствован Штраухом, Дынкиным, Юшкевичем, Хиндерером и другими. В этих работах предполагалось, что пространства состояний и управлений S и C являются борелевскими, а функции, определяющие модель, измеримы по Борелю.

Первоначальные попытки были направлены на доказательство в этих рамках существования "хороших" оптимальных или почти оптимальных стратегий. От стратегий требовалось, чтобы они были измеримы по Борелю. Для этой модели можно доказать универсальную измеримость оптимальной функции издержек и существование для любого числа $\epsilon > 0$ и вероятностной меры p на S $(p-\epsilon)$ -оптимальной стратегии (Штраух [83, теоремы 7.1 и 8.1]). Здесь $(p-\epsilon)$ -оптимальная стратегия — это такая стратегия, которая приводит к издержкам, отличающимся менее чем на ϵ от оптимальных издержек для почти всех по мере p начальных состояний.

Выше обсуждался вопрос о том, что даже в случае конечного горизонта оптимальная функция издержек не обязательно должна быть измерима по Борелю и, следовательно, не обязательно должна существовать везде ϵ -оптимальная стратегия (Блекуэлл [17, пример 2]). Трудности возникают из-за невозможности выбрать измеримую по Борелю функцию $\mu_k: S \rightarrow C$, которая обеспечивала бы почти достижение инфимума в соотношении (18) равномерно по x . Невозможность существования такой функции создает помехи на пути построения оптимальных стратегий посредством алгоритма динамического программирования (17) и (18), так как нужно сначала определить на каждом шаге меру p , по отношению к которой инфимум в соотношении (18) приближенно достигается для почти всех x по мере p . По существу, с той же проблемой приходится сталкиваться и при рассмотрении соотношения (25).

Трудности встроения почти оптимальных стратегий в случае бесконечного горизонта стоят еще более остро. Более того, с точки зрения приложений $(p-\epsilon)$ -оптимальная стратегия, даже если она может быть построена, является существенно менее привлекательным объектом, чем всюду ϵ -оптимальная стратегия, так как во многих ситуациях распределение p неизвестно или может меняться при повторении испытаний и тогда должна вычисляться новая ϵ -оптимальная стратегия.

В нашей книге класс допустимых стратегий в борелевской модели расширен за счет включения всех универсально измеримых стратегий. В части II мы покажем, что этот класс достаточно широк, чтобы обеспечить существование всюду ϵ -оптимальных стратегий, и если инфимум в соотношении (18) алгоритма ДП достигается для любых x и k , то существует всюду оптимальная стратегия. Таким образом, можно обходиться без понятия p -оптимальности. Главные доводы, объясняющие, почему оптимальные стратегии могут выбираться из класса универсально измеримых стратегий, содержатся в теореме о выборе из раздела 7.7.

Другое преимущество работы с классом универсально измеримых функций состоит в том, что этот класс замкнут относительно основных операций, таких, как интегрирование по универсально измеримому стохастическому ядру или суперпозиция.

Наш метод доказательства результатов для случая бесконечного горизонта основан на эквивалентности стохастической и детерминированной моделей принятия решений, которая показана в разделах 9.1—9.3. Переход от одной модели к другой проделан только для случая бесконечного горизонта, так как для получения результатов главы 8 это не нужно. Это также

проделано в предположениях (P), (N) или (D) определения 9.1, хотя модели имеют смысл при условиях, аналогичных предположениям (F^+) и (F^-) раздела 8.1. Связь стохастической и детерминированной моделей широко используется в разделах 9.4—9.6, где структурные результаты, доказанные в части I, применяются к детерминированной модели, а затем переносятся на стохастическую модель. Этот анализ показывает, как результаты для стохастических моделей с ограничениями на измеримость множества допустимых стратегий могут быть получены из общих результатов для абстрактных моделей динамического программирования, приведенных в части I, и является связующим звеном между двумя частями данной работы.

1.3. Связь книги с литературой

Этот раздел кратко суммирует содержание каждой главы и указывает на связь с существующей литературой. Результаты, полученные авторами в ходе исследований, публиковались в различном виде (Бертсекас [11—13], Шрив [76, 77], Шрив и Бертсекас [78—81]). Так как настоящая монография служит завершением их совместной работы, то некоторые результаты мы представляем как новые, хотя они, может быть, и содержатся в названных выше публикациях.

Часть I. Цель части I состоит в том, чтобы предложить унифицированную схему для моделей динамического программирования с конечным и бесконечным горизонтом. Мы ограничиваемся тремя типами моделей с бесконечным горизонтом, которые подобны моделям с дисконтированием, положительной модели Блекуэлла [16, 17] и отрицательной модели Штрауха [83]. Остается открытым вопрос, можно ли схему части I эффективно распространить на другие типы моделей с бесконечным горизонтом такие, как модель со средними издержками Ховарда [43] или сходящиеся модели динамического программирования того типа, что были рассмотрены Дынкиным и Юшкевичем [1] и Хордийком [42].

Постановка задачи в части I является новой. Работа, наиболее близкая к представленной здесь схеме, принадлежит Денардо [26], который рассмотрел абстрактную модель динамического программирования в предположениях сжимаемости. Большинство результатов Денардо включено в несколько измененном виде в главу 4. Постановка задачи, принадлежащая Денардо, основана на предположении сжимаемости и потому непригодна для моделей с конечным горизонтом таких, как в главе 3, и для моделей с бесконечным горизонтом таких, как в главе 5. Этим объясняется отличие нашей формулировки задачи от формулировки Денардо.

Большинство результатов части I являются обобщениями известных результатов для частных классов задач таких, например, как задачи детерминированного и стохастического оптимального управления. Мы стараемся сослаться на первоисточники, хотя в некоторых случаях это довольно трудно сделать. Некоторые результаты части I не были ранее опубликованы даже для частных задач и о них будет говориться как о новых результатах.

Глава 2. Здесь формулируется основная абстрактная задача последовательной оптимизации, которая является предметом рассмотрения части I. В разделе 2.3 описано несколько классов задач, представляющих практический интерес, и показано, что они являются частными случаями абстрактной задачи. Всем этим задачам уделено большое внимание в литературе; исключение составляет модель стохастического оптимального управления, базирующаяся на пснятии внешнего интеграла (п. 2.3.3). Эта модель, так же как и результаты последующих глав, относящиеся к ней, является новой.

Стохастическая модель, опирающаяся на понятие внешнего интеграла, была также рассмотрена Денардо [26], который использовал другое определение внешнего интеграла. Его определение хорошо работает в предположениях сжимаемости таких, как сделанное в главе 4. Однако многие результаты глав 3 и 5 несправедливы, если принять определение внешнего интеграла, данное Денардо. В то же время все основные результаты части I остаются справедливыми, если пользоваться моделью из п. 2.3.3.

Глава 3. В этой главе рассматривается вариант абстрактной задачи, соответствующей конечному горизонту. Основные результаты этой главы относятся к справедливости алгоритма динамического программирования, т.е. уравнения $J_N^* = T^N(J_0)$. Это уравнение в инженерной литературе часто принимается без критического анализа, в то время как в математических работах оно доказывается в предположениях более сильных, чем необходимо. Хотя нам и не удалось обнаружить соответствующий источник, мы уверены, что результаты предложения 3.1 для задач стохастического оптимального управления известны. Понятие последовательности стратегий, обладающей $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности и результат о существовании такой последовательности (предложение 3.2) являются новыми.

Глава 4. Здесь рассматривается вариант нашей абстрактной задачи, отвечающей бесконечному горизонту в предположении сжимаемости. Результаты этой главы во многом пересекаются с результатами Денардо [26]. Наше предположение сжимаемости лишь слабо отличается от аналогичного предположения Денардо. Предложения 4.1, 4.2, 4.3 (а) и 4.3 (в) принадлежат Денардо [26], в то время как предложение 4.3 (б) доказано Блекуэллом [17] для задачи стохастического оптимального управления. Предложение 4.4 является новым. Похожие условия компактности для существования стационарной оптимальной стратегии в задачах стохастического оптимального управления были даны Маитра [55], Кушнером [50] и Шелем [75]. Предложения 4.6 и 4.7 улучшают соответствующие результаты Денардо [26] и Макквина [56]. Модифицированный алгоритм итерирования стратегий и соответствующий результат о сходимости (предложение 4.9) в той форме, в которой они приводятся здесь, являются новыми. У Денардо [26] итерирование стратегий имеет несколько менее общую форму. Идея итерирования стратегий для задач детерминированного и стохастического оптимального управления восходит, разумеется, к раннему периоду истории динамического программирования (Беллман [9], Ховард [43]). Формулировка в терминах математического программирования из п. 4.3.3 принадлежит Денардо [26].

Глава 5. Здесь рассматриваются варианты нашей абстрактной модели с бесконечным горизонтом, подобные положительной и отрицательной моделям Блекуэлла [16, 17] и Штрауха [83]. В случае стохастического оптимального управления большинство результатов этой главы либо были получены этими авторами, либо могут быть тривиально выведены из их результатов. Та часть предложения 5.1, которая относится к существованию ϵ -оптимальной стационарной стратегии, является новой, как и последняя часть предложения 5.2. Предложения 5.3 и 5.5 в форме задач игорного дома были доказаны Дубинсом и Сведжем [30], монография которых стимулировала появление многих последующих работ по динамическому программированию. Предложения 5.9–5.11 являются новыми. Результаты, аналогичные тем, что содержатся в предложении 5.10, были получены Шелем [75] для задач стохастического оптимального управления в предположениях полунепрерывности и компактности.

Глава 6. Выводы этой главы являются новыми. Поводом для них послужит тот факт, что схема и результаты глав 2—5 применимы в первую очередь к задачам, где вопросы измеримости несущественны. Несмотря на возможность применять эти результаты к задачам, в которых стратегии подчиняются ограничениям измеримости, это может быть сделано только после аккуратной переформулировки задачи (см. главу 9). Здесь мы обобщаем нашу схему так, чтобы задачи, в которых вопросы измеримости привносят сложности по существу, могли решаться без такой переформулировки. Однако только часть предыдущих результатов переносится на обобщенную схему — главным образом те из них, что относятся к моделям с конечным горизонтом и к моделям с бесконечным горизонтом в предположениях сжимаемости.

Часть II. Цель части II состоит в детальном развитии задачи стохастического оптимального управления с дискретным временем (при аддитивных издержках) в борелевских пространствах. Здесь уже не обойтись без вопросов измеримости. Эта модель была выбрана среди частных моделей, рассмотренных в части I, по той причине, что она часто встречается, а также может служить образцом при преодолении трудностей, связанных с измеримостью, во многих других моделях принятия решений.

В главе 7 излагаются нужные топологические свойства борелевских пространств и вероятностных мер на них. В частности, подробно освещаются свойства аналитических множеств. В главе 8 рассматривается задача стохастического оптимального управления с конечным горизонтом, а глава 9 посвящена случаю бесконечного горизонта. В главе 10 рассматривается задача стохастического оптимального управления в ситуации, когда наблюдение за состоянием системы сопровождается "помехами". В главе 11 приводятся некоторые расширения теории глав 8 и 9.

Глава 7. Рассмотренные здесь свойства метризуемых пространств хорошо известны. Сведения о борелевских пространствах могут быть найдены в главе I книги Партхасарати [65], они содержатся также у Куратовского [46, 47]. У Партхасарати можно также найти обсуждение слабой топологии [65]. Предложения 7.20, 7.21 и 7.23 принадлежат Прохорову [2], но при их доказательстве мы следуем Варадараяну [87]. Часть предложения 7.21 имеется в книге Биллингсли [15]. Предложение 7.25 является обобщением результата, полученного для компакта X в работах Дубинса и Фридмана [29]. Различные варианты предложения 7.25 для некомпактного множества X использовались в литературе (Штраух [83], Блекуэлл и др. [20]), причем авторы, несомненно, имели в виду вложение множества X в компактное метрическое пространство с помощью теоремы Урысона. Предложение 7.27 опубликовано в работах Рениуса [66], Юшкевича [5] и Штрибель [85]. Мы приводим доказательство, принадлежащее Штрибель. Предложения 7.28 и 7.29 в той или иной форме встречаются в учебниках по теории вероятностей. Чаще всего делаются ссылки на книгу Лозва [51]. Предложения 7.30 и 7.31 легко выводятся из результатов, полученных Маитра [55] и Шелем [74], а большинство остальных результатов о полунепрерывных функциях, восходят к Хаусдорфу [38]. Предложение 7.33 принадлежит Дубинсу и Сзведжу [30]. Предложение 7.34 заимствовано из работы Фридмана [32].

Исследование аналитических множеств в борелевских пространствах началось несколько лет назад, но недавно оно получило дополнительный импульс, когда было обнаружено, что эти множества имеют применения в теории случайных процессов. Система Суслина и аналитические множества впервые появились в работе Суслина в 1917 г. [86], хотя самую идею приписывают Александрову. Суслин показал, что любое борелевское под-

множество действительной прямой может быть получено как ядро системы Суслина для замкнутых интервалов; аналогичным образом могут быть получены и неборелевские множества. Он также отметил, что аналитические множества из R — это как раз проекции на числовую ось борелевских множеств из R^2 . Универсальная измеримость аналитических множеств (следствие 7.42.1) была доказана Лузиным и Сирпинским [53] в 1918 г. (См., также работу Лузина [52]). Приведенное нами доказательство взято из книги Сакса [71]. Результаты об аналитических множествах взяты нами также у Куратовского [46], Делашери [25], Майера [57], Бурбаки [21], Партхасарати [65] и Бресслера и Сиона [22]. Предложение 7.43 принадлежит Майеру и Траки [58], но данное нами доказательство является оригинальным. Доказательства предложений 7.47 и 7.49 очень похожи на те, что можно найти в работе Блекуэлл и др. [20]. Основной результат предложения 7.49 принадлежит Янкову [6], но примерно в то же самое время этот результат был получен фон Нейманом [59, лемма 5, с. 448], хотя и опубликован позже. Результат Янкова — фон Неймана был усилен Макеем [54, теорема 6.3]. История доказательства этой теоремы изложена Вагнером [88, с. 900—901]. Предложение 7.50 (а) принадлежит Блекуэллу и др. [20]. Предложение 7.50 (б) вместе с усиленным вариантом предложения 11.4 обобщает результат Брауна и Пурвеса [23], которые доказали существование универсально измеримого селектора φ для случая, когда функция f измерима по Борелю.

Глава 8. Модель стохастического оптимального управления из главы 8 является по существу вариантом моделей с конечным горизонтом, рассмотренных Блекуэллом [16, 17], Штраухом [83], Хиндерером [40], Дынкиным и Юшкевичем [1], Блекуэллом и др. [20]. Во всех этих работах, за исключением последней, рассматриваются измеримые по Борелю стратегии и получаются результаты о существовании $(p-\epsilon)$ -оптимального типа (см. предыдущий раздел). Мы допускаем универсально измеримые стратегии и потому получаем результаты о существовании ϵ -оптимальных всюду стратегий. В главах 8 и 9 внимание сконцентрировано на доказательстве результатов, справедливых всюду. Однако полученные до этого результаты, относящиеся только к измеримым по Борелю стратегиям и выполняющиеся почти всюду по мере μ , легко можно получить как следствия. Это вытекает из следующего утверждения, краткий набросок доказательства которого мы приводим здесь:

(F) Если X и Y — борелевские пространства, $\rho_0, \rho_1, \dots$ — последовательность вероятностных мер на X , а μ — универсально измеримое отображение из X в Y , то существует измеримое по Борелю отображение μ' из X в Y такое, что $\mu(x) = \mu'(x)$ для почти всех x по мере ρ_k , $k = 0, 1, \dots$

Рассмотрим, как это замечание может быть использовано для получения результатов о существовании p -оптимального типа из наших результатов на примере предложения 9.19. Оно, в частности, утверждает, что для любых числа $\epsilon > 0$ и коэффициента дисконтирования α , меньшего единицы, существует ϵ -оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия, т.е. стратегия $\pi = (\mu, \mu, \dots)$, в которой μ представляет собой универсально измеримое отображение из S в C . Если на множестве S задана мера ρ_0 , то эта стратегия порождает последовательность мер $\rho_0, \rho_1, \dots$ на S , где ρ_k — распределение состояния на k -м шаге, когда начальное состояние распределено по мере ρ_0 и используется стратегия π .

Пусть отображение $\mu': S \rightarrow C$ измеримо по Борелю и равно μ для почти всех x по мере ρ_k , $k = 0, 1, \dots$. Положим $\pi' = (\mu', \mu', \dots)$. Тогда можно показать, что для почти всех по мере ρ_0 начальных состояний издержки, от-

вечающие π' , равны издержкам, соответствующим π , поэтому π' является (p_0, ϵ) -оптимальной нерандомизированной стационарной измеримой по Борелю стратегией. Существование такой стратегии π' является новым результатом. Аналогичные рассуждения применимы ко всем результатам о существовании из глав 8 и 9.

Наметим теперь доказательство утверждения (F). Предположим вначале, что Y есть борелевское подмножество отрезка $[0, 1]$. Тогда для рационального числа $r \in [0, 1]$ множество $U(r) = \{x | \mu(x) \leq r\}$ универсально измеримо. Для любого k обозначим через $\rho_k^*[U(r)]$ внешнюю меру множества $U(r)$ по отношению к мере ρ_k , и пусть $B_{k1}, B_{k2}, \dots$ — убывающая последовательность борелевских множеств, содержащих $U(r)$, такая, что

$$\rho_k^*[U(r)] = \rho_k \left[\bigcap_{j=1}^{\infty} B_{kj} \right].$$

Пусть $B(r) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} B_{kj}$. Тогда

$$\rho_k^*[U(r)] = \rho_k[B(r)], \quad k=0,1,\dots,$$

и далее применимы рассуждения леммы 7.27. Если Y — произвольное борелевское пространство, то оно борелевски изоморфно борелевскому подмножеству отрезка $[0, 1]$ (следствие 7.16.1) и отсюда следует справедливость утверждения (F).

Предложение 8.1 принадлежит Штрауху [83], а предложение 8.2 содержится в теореме 14.4 Хиндерера [40]. Пример 8.1 взят у Блекуэлла [17]. Предложение 8.3 содержит новый результат; наиболее сильный из полученных ранее результатов в этом направлении состоял в существовании аналитически измеримой ϵ -оптимальной стратегии в случае, когда функция издержек за один шаг неположительна [20]. Предложения 8.4 и 8.5, так же как и следствия предложения 8.5, представляют собой новые результаты. Полунепрерывные снизу модели привлекали внимание многих авторов (Миатра [55], Фурукава [33], Шель [73–75], Фридман [32], Химмельберг и др. [39]). Наша полунепрерывная снизу модель отличается от тех, что рассмотрены в литературе, главным образом формой ограничений на управление. Предложение 8.6 тесно связано с результатами, содержащимися в нескольких уже упомянутых источниках. Предложение 8.7 принадлежит Фридману [32].

Глава 9. Пример 9.1 представляет собой модифицированный пример 6.1 из работы Штрауха [83], и предложение 9.1 взято у Штрауха [83]. Сведение задачи стохастического оптимального управления к задаче детерминированного управления было предложено в другом контексте Витсенхаузенном [90] и впервые осуществляется систематически здесь. Это приводит к простому доказательству полуаналитичности снизу оптимальной функции издержек в задаче с бесконечным горизонтом (ср. следствие 9.4.1 и Штраух [83, теорема 7.1]). Предложения 9.8 и 9.9, так же как и утверждения (D) и (N) предложения 9.10 принадлежат Штрауху. Утверждение (P) предложения 9.10 является новым результатом. Предложение 9.12 совпадает с теоремой 5.2.2 работы Шеля [75], но следствие 9.12 является новым. Предложение 9.14 представляет собой частный случай теоремы 14.5 из работы Хиндерера [40]. Предложения 9.15–9.17 и следствия предложения 9.17 являются новыми результатами, хотя следствие 9.17.2 очень близко к теореме 13.3 работы Шеля [75]. Предложения 9.18–9.20 являются новыми. Предложение 9.21 представляет собой обобщение на случай бесконечного горизонта результата, принадлежащего Фридману [32], за исклю-

чением того, что нерандомизированная ϵ -оптимальная стратегия, которую строит Фридман, может не быть полумарковской.

Глава 10. Условное распределение для состояния при имеющейся информации использовалось как основа для управления системами с неполной информацией многими авторами при различных предположениях (см., например, Остром [8], Штрибель [84] и Савараги и Йошикава [72]). Исследование моделей с неполной информацией и бесчетными борелевскими пространствами состояний и управлений требует, однако, существования условного распределения, измеримо зависящего от параметра (предложение 7.27); этот результат получен не так давно (Рениус [66], Юшкевич [5], Штрибель [85]).

Глава 10 связана с главой 3 книги Штрибель [85] общим понятием достаточных статистик. Мы используем такие статистики для построения модели с полной информацией, которая эквивалентна в смысле предположений 10.2 и 10.3 первоначальной модели с неполной информацией. Из этой эквивалентности следует законность алгоритма динамического программирования и существование ϵ -оптимальных стратегий в слабых предположениях глав 8 и 9. Штрибель оправдывает использование достаточных статистик тем, что при очень сильных предположениях [85, теорема 5.5.1] справедлив алгоритм динамического программирования, и с их помощью строится ϵ -оптимальная стратегия.

Сильные предположения возникают из требования, чтобы нулевые множества в пространствах изменения статистик не зависели от используемой стратегии. Это требование вытекает из невозможности оперировать с поточечными частными инфимумами функций многих переменных без аппарата универсально измеримых стратегий и полуаналитических снизу функций. Аналогично Штрибель, мы показываем, что условные распределения состояний, основанные на имеющейся информации, как и сами векторы имеющейся информации (предложение 10.6), являются такими же достаточными статистиками (предложение 10.5).

Подходы Рениуса [66] и Юшкевича [5] сходны с нашим в том, что они строят модели с полной информацией, эквивалентные исходной модели. В своей модели с полной информацией Рениус основывает управление на наблюдениях и условных распределениях состояний, т. е. эти объекты служат состояниями в его модели с полной информацией. По Рениусу лицу, выбирающему управление, необходимо знать самое последнее наблюдение, чтобы было известно, какие управления допустимы. В предположении 10.5 мы показываем, что если нет ограничений на управления, то запоминание наблюдений ничего не дает. В модели Юшкевича [5] ограничений на управления нет и управление основывается на прошлых управлениях и условных распределениях. В этом случае ϵ -оптимальное управление возможно без учета прошлых управлений (предложения 10.5, 8.3, 9.19 и 9.20), поэтому наша формулировка несколько проще и столь же эффективна.

Глава 10 отличается от всех упомянутых работ тем, что в ней даны простые условия, которые гарантируют существование достаточных статистик для управления, а как только установлен факт их существования, то на модель с неполной информацией могут быть распространены все результаты глав 8 и 9.

Глава 11. Использование в разделе 11.1 понятия предельной измеримости является новым в динамическом программировании. В частности, предложение 11.3 является новым, и, как было отмечено ранее в связи с предложением 7.50 (6), предложение 11.4 обобщает результат Брауна и Пурвса [23]. Аналитически измеримые стратегии были введены Блекуэл-

лом и др. [20], ссылка на их работу дается в разделе 11.2. Модели с мультипликативным функционалом издержек и борелевскими пространствами близки к работам Фурукавы и Ивамoto [34, 35], а в работе [35] приведен алгоритм динамического программирования и дана характеристика равномерно оптимальных при горизонте N стратегий. Остальная часть предложения 11.7 является новой.

Приложение А. Внешний интеграл использовался несколькими авторами, но систематического его изложения нам не удалось отыскать.

Приложение Б. Предложение Б.6 впервые было опубликовано Суслиным [86], но приведенное здесь доказательство взято нами из работы Куратовского [46, раздел 38 VI]. Согласно Куратовскому и Мостовскому [48, с. 455] предельная σ -алгебра L_X была введена Лузиным, который назвал ее элементы "С-множествами". Подробное изучение этой σ -алгебры было проведено Селивановским [3] в 1928 г. Специалистам по теории множества предложения Б.9 и Б.10 известны достаточно хорошо, но нам не удалось найти доступное изложение. Предложение Б.11 является новым. Сензер и Молдин [24] показали независимо, что σ -алгебра L_X замкнута по отношению к суперпозиции функций; это утверждение является частью предложения Б.11. Предложение Б.12 является новым.

Кажется правдоподобным, что существует бесконечно много различных σ -алгебр между предельной σ -алгеброй и универсальной σ -алгеброй, пригодных для теории динамического программирования. Один из многообещающих методов конструирования таких σ -алгебр использует R -оператор из дескриптивной теории множеств (см. Канторович и Ливенсон [45]).

В одной из последних работ [19] Блекуэлл применил другой метод для определения "борелевски программируемой" σ -алгебры и показал, что она обладает многими из тех свойств, которые мы устанавливаем в приложении Б для предельной σ -алгебры. Однако неизвестно, удовлетворяет ли борелевски программируемая σ -алгебра условию, аналогичному тому, что содержится в предложении Б.12, и, следовательно, пригодна ли она для динамического программирования. Легко видеть, что предельная σ -алгебра содержится в борелевски программируемой σ -алгебре Блекуэлла, но совпадают ли эти две σ -алгебры также неизвестно.

Приложение В. Подробное обсуждение экспоненциальной топологией в множестве замкнутых подмножеств топологического пространства, можно найти у Куратовского [46, 47]. Там же, главным образом в разделе 43 из [47], доказаны свойства полунепрерывных (K) функций. Хаусдорфова метрика рассмотрена в [38, раздел 38].

Глава 2

МОНОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ЛЕЖАЩИЕ В ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ*)

В этой главе дается постановка абстрактной задачи последовательной оптимизации, которая будет основным объектом изучения в части I, и приводятся примеры частных случаев, охватывающие широкий класс практических задач.

2.1. Обозначения и предположения

Мы употребляем стандартные математические обозначения. В интересах читателя отметим, что действительная прямая обозначается через R , а расширенная действительная прямая — через R^* , т. е. $R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$. Множества $(-\infty, \infty) = R \cup \{\infty\}$ и $(-\infty, \infty) = R \cup \{-\infty\}$ будут выписываться в полном виде. Будем везде предполагать, что в множестве R определена обычная топология, порождаемая открытыми интервалами (α, β) , $\alpha, \beta \in R$ и (борелевская) σ -алгебра, порожденная этой топологией. Аналогично в R^* определена топология, порожденная открытыми интервалами (α, β) , $\alpha, \beta \in R$ вместе с множествами $(\gamma, \infty]$, $[-\infty, \gamma]$, $\gamma \in R$, и σ -алгебра, порожденная этой топологией. Прямое произведение множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ обозначается через $X_1 X_2 \dots X_n$.

Следующие определения и соглашения будут приняты на протяжении всей части I.

(1) S и C — два некоторых заданных множества, называемые соответственно *пространством состояний* и *пространством управлений*.

(2) Для любой точки $x \in S$ задано непустое множество $U(x)$ в C , которое называют *множеством ограничений на управления в точке x* .

(3) Через M обозначается множество всех функций $\mu: S \rightarrow C$ таких, что $\mu(x) \in U(x)$ для каждого $x \in S$. Через Π обозначается множество всех последовательностей $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ таких, что $\mu_k \in M$ для каждого k . Элементы множества Π называют *стратегиями*. Элементы множества Π , имеющие вид $\pi = (\mu, \mu, \dots)$, где $\mu \in M$, называют *стационарными стратегиями*.

(4) Введем обозначения:

F — множество всех действительных в расширенном смысле функций $J: S \rightarrow R^*$;

B — банахово пространство всех ограниченных действительных функций $J: S \rightarrow R$ с равномерной нормой $\| \cdot \|$, которая определяется формулой

$$\|J\| = \sup_{x \in S} |J(x)| \quad \forall J \in B.$$

*) Части I и II могут быть прочитаны независимо друг от друга. Читатель при желании может принять сразу за чтение части II.

(5) Для любых функций $J, J' \in F$ будем писать

$$J = J', \text{ если } J(x) = J'(x) \quad \forall x \in S,$$

$$J \leq J', \text{ если } J(x) \leq J'(x) \quad \forall x \in S.$$

Для любой функции $J \in F$ и любого числа $\epsilon > 0$ обозначим через $J + \epsilon$ функцию, принимающую значение $J(x) + \epsilon$ в каждой точке $x \in S$, так что $(J + \epsilon)(x) = J(x) + \epsilon \quad \forall x \in S$.

(6) На протяжении части I мы будем иметь дело с расширенной числовой прямой R^* . Применим обычные соглашения, касающиеся отношения порядка сложения и умножения в R^* , за исключением того, что положим $\infty - \infty = -\infty + \infty = \infty$, а также будем считать, что произведение нуля и бесконечности равно нулю. В этом случае сумма и произведение любых двух чисел из расширенной действительной прямой вполне определены. Деление на ноль или бесконечность не встречается в наших выкладках. В частности, мы устанавливаем следующие правила действий, которые включают значения ∞ и $-\infty$:

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty \quad \text{для } -\infty \leq \alpha \leq \infty,$$

$$\alpha - \infty = -\infty + \alpha = -\infty \quad \text{для } -\infty \leq \alpha < \infty,$$

$$\alpha \infty = \infty \alpha = \infty, \quad \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = -\infty \quad \text{для } 0 < \alpha \leq \infty,$$

$$\alpha \infty = \infty \alpha = -\infty, \quad \alpha(-\infty) = (-\infty)\alpha = \infty \quad \text{для } -\infty \leq \alpha < 0,$$

$$0 \infty = \infty 0 = 0 = 0(-\infty) = (-\infty)0, \quad -(-\infty) = \infty;$$

$$\inf \phi = +\infty, \quad \sup \phi = -\infty,$$

где ϕ — пустое множество.

Для определенных таким образом правил действий остаются справедливыми следующие законы арифметики:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_1, \quad (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3),$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1, \quad (\alpha_1 \alpha_2) \alpha_3 = \alpha_1 (\alpha_2 \alpha_3).$$

Имеем также $\alpha(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha\alpha_1 + \alpha\alpha_2$, если либо $\alpha \geq 0$, либо еще $(\alpha_1 + \alpha_2)$ не является выражением вида $+\infty - \infty$.

(7) Для любой последовательности функций $\{J_k\}$ со всеми $J_k \in F$ обозначим через $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k$ поточечный предел последовательности $\{J_k\}$ (предполагая, что он вполне определен как действительная в расширенном смысле функция) и через $\limsup_{k \rightarrow \infty} J_k$ ($\liminf_{k \rightarrow \infty} J_k$) — поточечный верхний (нижний) предел. Для любой совокупности $\{J_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset F$, параметризованной элементами множества A , обозначим через $\inf_{\alpha \in A} J_\alpha$ функцию, принимающую значение $\inf_{\alpha \in A} J_\alpha(x)$ в каждой точке $x \in S$.

Основное отображение. Пусть задана функция H , которая отображает множество SCF (прямое произведение множеств S , C и F) в R^* . Для любого отображения $\mu \in M$ определим оператор $T_\mu: F \rightarrow F$ формулой

$$T_\mu(J)(x) = H[x, \mu(x), J] \quad \forall x \in S. \quad (1)$$

Определим также оператор $T: F \rightarrow F$, полагая

$$T(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J). \quad (2)$$

Обозначим через T^k , $k = 1, 2, \dots$, k -кратную итерацию оператора T . Для удобства будем считать также $T^0(J) = J$ для любой функции $J \in F$. Для лю-

бой стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ обозначим через $(T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_k})$ суперпозицию операторов $T_{\mu_0}, \dots, T_{\mu_k}$, $k = 0, 1, \dots$

Следующее предположение будет использоваться нами на протяжении всей части I.

Предположение монотонности. Для любых состояний $x \in S$, управления $u \in U(x)$ и функций $J, J' \in F$ имеет место неравенство

$$H(x, u, J) \leq H(x, u, J'), \quad \text{если } J \leq J'. \quad (3)$$

Из предположения о монотонности вытекают следующие соотношения:

$$J \leq J' \Rightarrow T(J) \leq T(J') \quad \forall J, J' \in F,$$

$$J \leq J' \Rightarrow T_\mu(J) \leq T_\mu(J') \quad \forall J, J' \in F, \mu \in M.$$

Из этих соотношений в свою очередь вытекают такие утверждения для всех $J \in F$:

$$J \leq T(J) \Rightarrow T^k(J) \leq T^{k+1}(J), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$J \geq T(J) \Rightarrow T^k(J) \geq T^{k+1}(J), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$J \leq T_\mu(J) \quad \forall \mu \in M \Rightarrow (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_k})(J) \leq (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{k+1}})(J),$$

$$k = 0, 1, \dots, \pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi,$$

$$J \geq T_\mu(J) \quad \forall \mu \in M \Rightarrow (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_k})(J) \geq (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{k+1}})(J),$$

$$k = 0, 1, \dots, \pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi.$$

Другой факт, который будет часто использоваться, состоит в том, что для любой функции $J \in F$ и любого числа $\epsilon > 0$ существует отображение $\mu_\epsilon \in M$ такое, что

$$T_{\mu_\epsilon}(J)(x) \leq \begin{cases} T(J)(x) + \epsilon, & \text{если } T(J)(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } T(J)(x) = -\infty. \end{cases}$$

В частности, если функция J такова, что $T(J)(x) > -\infty$ для любых $x \in S$, то для любого числа $\epsilon > 0$ найдется отображение $\mu_\epsilon \in M$ такое, что $T_{\mu_\epsilon}(J) \leq T(J) + \epsilon$.

2.2. Постановка задачи

Пусть задана функция $J_0 \in F$, удовлетворяющая неравенству

$$J_0(x) > -\infty \quad \forall x \in S. \quad (4)$$

Для любой стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ и любого положительного целого числа N рассмотрим функции $J_{N,\pi} \in F$ и $J_\pi \in F$, определяемые следующим образом:

$$J_{N,\pi}(x) = (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \quad \forall x \in S, \quad (5)$$

$$J_\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \quad \forall x \in S. \quad (6)$$

Доказательство любого из последующих утверждений потребует соответствующих предположений, при которых функция J_π будет вполне определена (т.е. предел в выражении (6) будет существовать для всех $x \in S$). Назовем $J_{N,\pi}$ функцией издержек за N шагов при стратегии π , а J_π — функцией издержек при стратегии π . Заметим, что $J_{N,\pi}$ зависит только от первых N составляющих стратегии, остальные же излишни. Таким образом, когда речь идет об N -шаговой задаче, можно было бы рассматривать стратегии, содержащие лишь конечные последовательности

отображений (что фактически и делается в главе 8). Однако имеются определенные преимущества в использовании одинаковых обозначений в задачах с конечным и бесконечным горизонтом; этим объясняются принятые в части I обозначения.

На протяжении всей части I будем рассматривать N -шаговую задачу оптимизации:

$$\text{минимизировать } J_{N, \pi}(x) \text{ при условии, что } \pi \in \Pi, \quad (F)$$

и ее бесконечношаговую версию:

$$\text{минимизировать } J_{\pi}(x) \text{ при условии, что } \pi \in \Pi. \quad (I)$$

Назовем задачу (F) задачей с конечным горизонтом N , а задачу (I) — задачей с бесконечным горизонтом.

Для фиксированного состояния $x \in S$ обозначим через $J_N^*(x)$ и $J^*(x)$ оптимальные издержки в этих задачах, т.е. положим

$$J_N^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{N, \pi}(x) \quad \forall x \in S, \quad (7)$$

$$J^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{\pi}(x) \quad \forall x \in S. \quad (8)$$

Назовем J_N^* оптимальной функцией издержек за N шагов, а J^* — оптимальной функцией издержек^{*)}.

Будем говорить, что стратегия $\pi^* \in \Pi$ является оптимальной при горизонте N в состоянии $x \in S$, если $J_{N, \pi^*}(x) = J_N^*(x)$, и оптимальной в состоянии $x \in S$, если $J_{\pi^*}(x) = J^*(x)$. Будем говорить, что стратегия $\pi^* \in \Pi$ является оптимальной при горизонте N (соответственно — оптимальной), если $J_{N, \pi^*} = J_N^*$ (соответственно, если $J_{\pi^*} = J^*$). Стратегию $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots)$ будем называть равномерно оптимальной при горизонте N , если стратегия $(\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, \dots)$ оптимальна при горизонте $N - i$ для всех $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Таким образом, если стратегия равномерно оптимальна при горизонте N , то она также оптимальна при горизонте N , но обратное утверждение неверно. Для стационарной стратегии $\pi = (\mu, \mu, \dots) \in \Pi$ будем писать $J_{\pi} = J_{\mu}$. Таким образом, стационарная стратегия $\pi^* = (\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна, если $J^* = J_{\mu^*}$.

Для любого числа $\epsilon > 0$ будем говорить, что стратегия $\pi_{\epsilon} \in \Pi$ является ϵ -оптимальной при горизонте N , если

$$J_{N, \pi_{\epsilon}}(x) \leq \begin{cases} J_N^*(x) + \epsilon, & \text{если } J_N^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } J_N^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

Будем говорить, что стратегия $\pi_{\epsilon} \in \Pi$ является ϵ -оптимальной, если

$$J_{\pi_{\epsilon}}(x) \leq \begin{cases} J^*(x) + \epsilon, & \text{если } J^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } J^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

Если $\{\epsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел с $\epsilon_n \downarrow 0$, то будем говорить, что последовательность стратегий $\{\pi_n\}$ $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемо сходится к оптимальности, если $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{N, \pi_n} = J_N^*$ и для $n = 2, 3, \dots$

$$J_{N, \pi_n}(x) \leq \begin{cases} J_N^*(x) + \epsilon_n, & \text{если } J_N^*(x) > -\infty, \\ J_{N, \pi_{n-1}}(x) + \epsilon_n, & \text{если } J_N^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

^{*)} В русской литературе эти функции называют также ценами задачи. (Прим. ред.)

2.3. Применение к частным случаям

Большое количество задач последовательной оптимизации, представляющих практический интерес, могут рассматриваться как частные случаи задач общего вида (F) и (I). В этом разделе будет дано описание нескольких таких задач, к которым мы будем постоянно обращаться на протяжении всей части I. Детальное рассмотрение некоторых из этих задач можно найти в учебнике Бертсекаса [12].

2.3.1. Детерминированное оптимальное управление

Рассмотрим отображение $H: SCF \rightarrow R^n$, определяемое формулой

$$H(x, u, J) = g(x, u) + \alpha J[f(x, u)] \quad \forall x \in S, \quad u \in C, J \in F. \quad (9)$$

В части I относительно этого отображения всегда будут делаться следующие предположения:

(1) Функции g и f отображают множество SC соответственно в множества $[-\infty, \infty]$ и S .

(2) Скаляр α положителен.

Очевидно, что отображение H удовлетворяет предположению монотонности. Пусть функция J_0 тождественно равна нулю, т.е. $J_0(x) = 0 \quad \forall x \in S$. Тогда соответствующая N -шаговая задача оптимизации (F) может быть записана в виде:

$$\text{минимизировать } J_{N, \pi}(x_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k)] \quad (10)$$

при условии, что $x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k)]$, $\mu_k \in M$, $k = 0, \dots, N-1$.

Это — задача детерминированного оптимального управления с конечным горизонтом. Скаляр α обычно называют *коэффициентом дисконтирования*.

Задача с бесконечным горизонтом (I) может быть представлена в виде:

$$\text{минимизировать } J_{\pi}(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k)] \quad (11)$$

при условии, что $x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k)]$, $\mu_k \in M$, $k = 0, 1, \dots$

Этот предел существует, если выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

$$g(x, u) \geq 0 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad (12)$$

$$g(x, u) \leq 0 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad (13)$$

$$\alpha < 1, \quad 0 \leq g(x, u) \leq b \quad \text{для некоторого } b \in (0, \infty) \\ \text{и всех } x \in S, \quad u \in U(x). \quad (14)$$

В любом утверждении относительно задачи (11) обязательно будем явно предполагать одно из этих трех условий выполненным. Заметим, что требование $0 \leq g(x, u) \leq b$ из условия (14) не является более ограничительным, чем обычное требование $|g(x, u)| \leq b/2$. Действительно, прибавление константы $b/2$ к функции g увеличивает издержки, соответствующие каждой стратегии, на одну и ту же величину $b/2(1 - \alpha)$, и задача остается по существу неизменной.

Задачи детерминированного оптимального управления такие, как (10) и (11), и их стохастические аналоги, рассматриваемые в предположении счетности (как это сделано в следующей части раздела) разносторонне

изучены в [12] (главы 2,6 и 7). Здесь эти задачи приводятся в стационарной форме в том смысле, что пространства состояний и управлений S и C , ограничение управления $U(\cdot)$, функция системы f и издержки g на каждом шаге не изменяются при переходе от каждого шага к следующему. Если это не так, то мы имеем дело с *нестационарной задачей*. Однако нестационарную задачу можно свести к стационарной с помощью процедуры, описанной в разделе 10.1 и в [12, (раздел 6.7)]. По этой причине в дальнейшем в части I нестационарные задачи рассматриваться не будут.

Отметим, что в рамках нашей постановки имеется возможность вводить ограничения состояния системы вида $x_k \in X$, $k = 0, 1, \dots$, если всякий раз, когда $x \notin X$, полагать $g(x, u) = \infty$. Именно по этой причине функции g разрешается принимать значение, равное ∞ . Обобщенные варианты задач (10) и (11) получаются в случае, если скаляр α заменяется на неотрицательную функцию $\alpha: SC \rightarrow R^*$, так что коэффициент дисконтирования зависит от текущих состояния и управления. Читателю будет ясно, что результаты получаемые для задач (F) и (I), применимы и к этим более общим детерминированным задачам.

2.3.2. Стохастическое оптимальное управление — счетное пространство возмущений

Рассмотрим отображение $H: SCF \rightarrow R^*$, которое определяется формулой

$$H(x, u, J) = E \{ g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] \mid x, u \} \quad (15)$$

при следующих предположениях:

(1) Параметр w принимает значения из *счетного* множества W с данным распределением вероятностей $p(dw \mid x, u)$, зависящим от x и u , а $E \{ \cdot \mid x, u \}$ обозначает математическое ожидание относительно этого распределения. (Подробное определение см. ниже.)

(2) Функции g и f отображают множество SCW соответственно в $[-\infty, \infty]$ и S .

(3) Скаляр α положителен.

Употребляемое в формуле (15) математическое ожидание понимается как обычный интеграл (п. 7.4.4), также и как внешний интеграл (приложение А), причем σ -алгебру в множестве W считаем состоящей из всех подмножеств W . Таким образом, если w_i , $i = 1, 2, \dots$, — элементы множества W , $(p^1, p^2, \dots)$ — произвольное распределение вероятностей на W , а $z: W \rightarrow R^*$ — некоторая функция, то математическое ожидание задается формулой

$$E \{ z(w) \} = \sum_{i=1}^{\infty} p^i z^+(w_i) - \sum_{i=1}^{\infty} p^i z^-(w_i),$$

где

$$z^+(w_i) = \max \{ 0, z(w_i) \}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$z^-(w_i) = \max \{ 0, -z(w_i) \}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

В соответствии с принятым соглашением $\infty - \infty = \infty$, математическое ожидание $E\{z(w)\}$ вполне определено для любой функции $z: W \rightarrow R^*$ и любого распределения вероятностей $(p^1, p^2, \dots)$ на множестве W . В частности, если обозначить через $(p^1(x, u), p^2(x, u), \dots)$ распределение вероятностей $p(dw \mid x, u)$ на множестве $W = \{w_1, w_2, \dots\}$, то форму-

лу (15) можно переписать в виде

$$H(x, u, J) = \sum_{i=1}^{\infty} p^i(x, u) \max \{0, g(x, u, w_i) + \alpha J[f(x, u, w_i)]\} - \\ - \sum_{i=1}^{\infty} p^i(x, u) \max \{0, -[g(x, u, w_i) + \alpha J[f(x, u, w_i)]]\}.$$

Имеется единственный случай, когда необходимо соблюдать осторожность при использовании определенного таким образом математического ожидания. А именно, для двух функций $z_1: W \rightarrow R^*$ и $z_2: W \rightarrow R^*$ равенство

$$E\{z_1(w) + z_2(w)\} = E\{z_1(w)\} + E\{z_2(w)\} \quad (16)$$

не всегда справедливо. Его справедливость гарантируется в случаях, если: (а) $E\{z_1^+(w)\} < \infty$ и $E\{z_2^+(w)\} < \infty$, или (б) $E\{z_1^-(w)\} < \infty$ и $E\{z_2^-(w)\} < \infty$, или (в) $E\{z_1^+(w)\} < \infty$ и $E\{z_1^-(w)\} < \infty$ (см. лемму 7.11). Однако всегда выполняется неравенство

$$E\{z_1(w) + z_2(w)\} \leq E\{z_1(w)\} + E\{z_2(w)\}.$$

Очевидно, что отображение H в формуле (15) удовлетворяет предположению монотонности. Пусть функция J_0 есть тождественный нуль, т.е. $J_0(x) = 0 \quad \forall x \in S$. Тогда, если $g(x, u, w) > -\infty$ для любых x, u, w , то функцию издержек за N шагов можно представить в виде

$$J_{N, \pi}(x_0) = E_{w_0} \{ g[x_0, \mu_0(x_0), w_0] + E_{w_1} \{ \alpha g[x_1, \mu_1(x_1), w_1] + \\ + E_{w_2} \{ \dots + E_{w_{N-1}} \{ \alpha^{N-1} g[x_{N-1}, \mu_{N-1}(x_{N-1}), w_{N-1}] | x_{N-1}, \\ \mu_{N-1}(x_{N-1}) \} | \dots \} | x_0, \mu_0(x_0) \} = \\ = E_{w_0} \{ E_{w_1} \{ \dots E_{w_{N-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] | x_{N-1}, \right. \\ \left. \mu_{N-1}(x_{N-1}) \} | \dots \} | x_0, \mu_0(x_0) \} \right\}, \quad (17)$$

где состояния $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ удовлетворяют уравнениям

$$x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (18)$$

Изменение порядка операций суммирования и взятия математического ожидания в равенстве (17) допустимо, так как $g(x, u, w) > -\infty$ для любых x, u, w , а для любых пространства с мерой (Ω, F, ν) , измеримой функции $h: \Omega \rightarrow R^*$ и числа $\lambda \in (-\infty, +\infty]$ справедливо равенство

$$\lambda + \int h \, d\nu = \int (\lambda + h) \, d\nu.$$

Если из уравнения (18) последовательно выразить состояния $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ через $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$ и x_0 , то из (17) станет видно, что $J_{N, \pi}(x_0)$ получается последовательным интегрированием по $w_{N-1}, \dots, w_0$. Для каждого начального состояния $x_0 \in S$ и стратегии $\pi \in \Pi$ распределения вероятностей $p^i(x_0, \mu_0(x_0)), \dots, p^i(x_{N-1}, \mu_{N-1}(x_{N-1}))$, $i = 1, 2, \dots$ (по теореме о произведении мер [7, теорема 2.6.2]) определяют на прямом произведении W^N единственную меру N копий множества W на себя. Если применима теорема Фубини [7, теорема 2.6.4], то функцию издержек

за N шагов $J_{N,\pi}(x_0)$ из равенства (17) иначе можно записать в виде

$$J_{N,\pi}(x_0) = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\}, \quad (19)$$

где математическое ожидание берется относительно произведения мер на W^N , а состояния $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ выражаются через $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$ и x_0 с помощью уравнения (18). Если математическое ожидание в (19) не имеет вида $\infty - \infty$, т.е. если выполняется одно из двух неравенств

$$E \left\{ \max \left\{ 0, \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \right\} < \infty,$$

или

$$E \left\{ \max \left\{ 0, - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \right\} < \infty,$$

то теорема Фубини применима. В частности, это справедливо, если либо

$$E \{ \max \{ 0, g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \} \} < \infty, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

либо

$$E \{ \max \{ 0, -g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \} \} < \infty, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

либо функция g равномерно ограничена сверху или снизу некоторым действительным числом. Если функция $J_{N,\pi}(x_0)$ допускает представление в виде (19) для любого начального состояния $x_0 \in S$ и любой стратегии $\pi \in \Pi$, то N -шаговая задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\text{минимизировать } J_{N,\pi}(x_0) = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\}$$

$$\text{при условии } x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad \mu_k \in M, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Это — традиционная форма постановки N -шаговой задачи стохастического оптимального управления и одновременно отправная точка для модели с конечным горизонтом части II (определение 8.3).

Соответствующая задача с бесконечным горизонтом (сравните с определением 9.3) формулируется таким образом:

$$\text{минимизировать } J_{\pi}(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \quad (20)$$

$$\text{при условии } x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad \mu_k \in M, \quad k = 0, 1, \dots$$

Этот предел существует при выполнении любого из трех условий:

$$g(x, u, w) \geq 0 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W, \quad (21)$$

$$g(x, u, w) \leq 0 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W, \quad (22)$$

$$\alpha < 1, \quad 0 \leq g(x, u, w) \leq b \quad \text{для некоторого } b \in (0, \infty) \\ \text{и всех } x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W. \quad (23)$$

В любом результате, относящемся к задаче (20), будет явно предполагаться выполнение одного из трех условий.

Аналогично детерминированному случаю стохастическая задача обобщается, если скаляр α заменить на неотрицательную функцию $\alpha: SCW \rightarrow R^+$.

Для этого варианта задачи отображение H принимает вид

$$H(x, u, J) = E \{ g(x, u, w) + \alpha(x, u, w)J[f(x, u, w)] \mid x, u \}.$$

Этот случай охватывает некоторые полумарковские модели принятия решений (см. [44]). В дальнейшем мы не будем заниматься этим отображением, предоставляя заинтересованному читателю самому вывести частные результаты для задач (F) и (I) из общих результатов части I.

Добавим, что нестационарный вариант задачи сводится к стационарному (см. раздел 10.1 или [12], раздел 6.7).

Предположение о счетности множества W выполняется для многих задач, представляющих интерес. Они выполняются, например, в задачах стохастического оптимального управления, содержащих марковские цепи с конечным или счетным числом состояний (см., например [27, 50]). Если множество W несчетно, то дело усложняется тем, что требуется определить математическое ожидание

$$E \{ g[x, \mu(x), w] + \alpha J[f(x, \mu(x), w)] \mid x, u \}$$

для любой функции $\mu \in M$. Для преодоления этой трудности можно выбрать один из двух путей. Одна возможность состоит в том, чтобы определить математическое ожидание с помощью внешнего интеграла, как это делается в следующем подразделе. Другой подход составляет содержание части II, где от S , C и W требуются свойства соответствующих измеримых структур, а также предполагается измеримость отображений $\mu \in M$. В этом случае представление задачи стохастического оптимального управления в виде общих задач (F) и (I) нетривиально. Тем не менее, как будет показано в главе 9, такая переформулировка не только возможна, но и весьма полезна.

2.3.3. Стохастическое оптимальное управление – формулировка с внешним интегралом

Рассмотрим отображение $H: SCF \rightarrow R^*$, задаваемое формулой

$$H(x, u, J) = E^* \{ g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] \mid x, u \} \quad (24)$$

и предположим следующее:

(1) Параметр w принимает значение из измеримого пространства (W, F) . Для любой фиксированной пары $(x, u) \in SC$ задана вероятностная мера $p(dw \mid x, u)$ на пространстве (W, F) , а символ $E^* \{ \cdot \mid x, u \}$ в формуле (24) обозначает внешний интеграл (см. приложение А) относительно этой меры. Таким образом, в обозначениях приложения А мы можем написать

$$H(x, u, J) = \int^* \{ g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] \} p(dw \mid x, u).$$

(2) Функции g и f отображают множество SCW соответственно в $[-\infty, \infty]$ и S .

(3) Скаляр α положителен.

Заметим, что отображения (9) и (15) из двух предшествующих подразделов являются частными случаями отображения H из (24). Отображение (9) (детерминированная задача) получается из (24), если множество W состоит из единственного элемента. Отображение (15) (стохастическая задача со счетным пространством возмущений) представляет собой частный случай отображения (24), когда множество W счетно, а F является σ -алгеброй, состоящей из всех подмножеств W . По этой причине в дальнейших рассуждениях мы не будем больше рассматривать отображения (9) и (15), а сосредоточим внимание на отображении (24).

Очевидно, отображение H , определяемое формулой (24), удовлетворяет предположению монотонности. Точно так же, как для моделей из двух предшествующих разделов, положим $J_0(x) = 0 \quad \forall x \in S$ и рассмотрим соответствующие задачу (F) с конечным горизонтом и задачу (I) с бесконечным горизонтом. Если на множества S, C и функции f, g и p наложить соответствующие требования измеримости, то издержки за N шагов

$$J_{N, \pi}(x) = (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x)$$

можно будет определить в терминах обычного интегрирования для любой стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$, для которой функции $\mu_k, k = 0, 1, \dots$, в подходящем смысле измеримы. Чтобы убедиться в этом, предположим, что в множестве S задана σ -алгебра $\mathcal{S}$, в множестве C — σ -алгебра $\mathcal{C}$, а B есть борелевская σ -алгебра в R^* . Предположим, что функция f (SCF, S)-измерима, а функция g (SCF, B)-измерима, где SCF обозначает произведение σ -алгебр в SCW . Предположим, что для любого фиксированного множества $B \in F$ функция $p(B|x, u)$ SC -измерима по (x, u) , и рассмотрим стратегию $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$, где функции μ_k (S, C)-измеримы при каждом k . Эти условия гарантируют, что оператор $T_{\mu_k}(J)$, задаваемый формулой

$$T_{\mu_k}(J)(x) = \int \{g(x, \mu_k(x), w) + \alpha J[f(x, \mu_k(x), w)]\} p(dw|x, u),$$

S -измерим при любых k и S -измеримой функции $J \in F$. Точно так же, как и в предыдущем разделе, для начального состояния $x_0 \in S$ и стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ вероятностные меры $\rho(\cdot|x_0, \mu_0(x_0)), \dots, \rho(\cdot|x_{N-1}, \mu_{N-1}(x_{N-1}))$ в совокупности с системой уравнений

$$x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad k = 0, \dots, N-2, \quad (25)$$

определяют единственную меру $\rho(d(w_0, \dots, w_{N-1})|x_0, \pi)$ на N -кратном прямом произведении W^N копий пространства W . (Заметим, что посредством уравнений (25) состояния x_k могут быть представлены как измеримые функции переменных $(w_0, \dots, w_{N-1}), k = 0, 1, \dots, N-1$.) Используя выкладки предыдущего раздела, получим, что в случае, когда $g(x, u, w) > -\infty$ и применима теорема Фубини, справедливо равенство

$$\begin{aligned} J_{N, \pi}(x_0) &= E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} = \\ &= \int_{W^N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \rho(d(w_0, \dots, w_{N-1})|x_0, \pi), \end{aligned}$$

где состояния $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ выражены через возмущения $w_0, w_1, \dots, w_{N-1}$ и начальное состояние x_0 с помощью уравнений (25). Как и в предыдущем разделе, для применимости теоремы Фубини достаточно выполнения одного из двух неравенств:

$$E \left\{ \max \left\{ 0, \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \right\} < \infty$$

или

$$E \left\{ \max \left\{ 0, - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \right\} < \infty.$$

Таким образом, если на множества S, C, W и функции f, g и $p(dw|x, u)$ наложены соответствующие условия измеримости и применима теорема Фубини, то функция издержек за N шагов $J_{N, \pi}$, отвечающая измеримой

стратегии π , приводится к обычному виду

$$J_{N, \pi}(x_0) = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\}.$$

Важность этого замечания следует из того факта, что для множества

$$\tilde{\Pi} = \{ \pi \in \Pi \mid \pi = (\mu_0, \mu_1, \dots),$$

$$\text{функции } \mu_k \in M(S, C)\text{-измеримы, } k = 0, 1, \dots \}$$

имеет место неравенство

$$\inf_{\pi \in \Pi} J_{N, \pi}(x) \leq \inf_{\pi \in \tilde{\Pi}} J_{N, \pi}(x) \quad \forall x \in S.$$

Таким образом, если в задаче (F) удастся найти оптимальную (ϵ -оптимальную) стратегию, π^* и $\pi^* \in \tilde{\Pi}$ (т.е. является измеримой), то π^* оптимальна (ϵ -оптимальна) для задачи

$$\text{минимизировать } J_{N, \pi}(x) \quad \text{при условии } \pi \in \tilde{\Pi},$$

которая представляет собой традиционную задачу стохастического оптимального управления.

Эти замечания являются иллюстрацией того, как можно сперва использовать внешний интеграл в первоначальной постановке частной задачи, а затем с помощью (быть может, простых) соображений убедиться, что достаточно ограничиться классом измеримых стратегий $\tilde{\Pi}$, для которых функция издержек допускает традиционное толкование. Основное преимущество, которое дает подход с внешним интегралом, это — простота. В первоначальной постановке задачи не требуется вводить тонкие топологические и теоретико-множественные конструкции, как это делается в части II. Кроме того, алгоритм итерации стратегий, описанный в главе 4, применим к задаче из данного раздела, но не годится для соответствующей модели из части II. Использование внешнего интеграла, однако, имеет свои ограничения, которые становятся очевидными при анализе задач с неполной информацией с помощью достаточных статистик (глава 10).

2.3.4. Стохастическое оптимальное управление — мультипликативный функционал издержек

Рассмотрим отображение $H: SCF \rightarrow R^*$, задаваемое формулой

$$H(x, u, J) = E \{ g(x, u, w) J[f(x, u, w)] \mid x, u \}. \quad (26)$$

Сделаем относительно возмущения w и функций g и f такие же предположения, как в п. 2.3.2: w принимает значения из *счетного* множества W в соответствии с заданным распределением вероятностей, зависящим от состояния x и управления u . Далее предполагаем, что выполняется неравенство

$$g(x, u, w) \geq 0 \quad \forall x \in S, \quad (27)$$

$$u \in U(x), \quad w \in W.$$

При выполнении условия (27) отображение H , определяемое формулой (26), удовлетворяет предположению монотонности.

Положим $J_0(x) = 1 \quad \forall x \in S$ и рассмотрим задачи (F) и (I). Задача (F) соответствует задаче стохастического оптимального управления следующей-

го вида:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } J_{N,\pi}(x_0) = \\ & = E\{g[x_0, \mu_0(x_0), w_0] \dots g[x_{N-1}, \mu_{N-1}(x_{N-1}), w_{N-1}]\} \\ & \text{при условии } x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad \mu_k \in M, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

а задача (I) соответствует варианту задачи (28) с бесконечным горизонтом. Предел в (28) при $N \rightarrow \infty$ существует, если $g(x, u, w) \geq 1$ для любых x, u, w или если $0 \leq g(x, u, w) \leq 1$ для любых x, u, w . Частным случаем задачи (28) является задача с экспоненциальной функцией издержек

$$\text{минимизировать } E\left\{\exp\left[\sum_{k=0}^{N-1} g'[x_k, \mu_k(x_k), w_k]\right]\right\}$$

$$\text{при условии } x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad \mu_k \in M, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где функция g' отображает множество SCW в $(-\infty, \infty]$.

2.3.5. Минимаксное управление

Рассмотрим отображение $H: SCF \rightarrow R^*$, задаваемое формулой

$$H(x, u, J) = \sup_{w \in W(x, u)} \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)]\} \quad (29)$$

в следующих предположениях:

(1) Параметр w принимает значения из некоторого множества W , а $W(x, u)$ есть непустое подмножество W при любых значениях состояния $x \in S$ и управления $u \in U(x)$.

(2) Функции g и f отображают множество SCW соответственно в $[-\infty, \infty]$ и S .

(3) Скаляр α положителен.

Очевидно, что предположение о монотонности удовлетворяется. Положим $J_0(x) = 0 \quad \forall x \in S$. Если $g(x, u, w) > -\infty$ для всех x, u, w , то соответствующая N -шаговая задача (F) может быть сформулирована также в виде:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } J_{N,\pi}(x_0) = \\ & = \sup_{w_k \in W[x_k, \mu_k(x_k)]} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \\ & \text{при условии } x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad \mu_k \in M, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

а это — задача N -шагового минимаксного управления.

Задача с бесконечным горизонтом формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } J_{\pi}(x_0) = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{w_k \in W[x_k, \mu_k(x_k)]} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g[x_k, \mu_k(x_k), w_k] \right\} \\ & \text{при условии } x_{k+1} = f[x_k, \mu_k(x_k), w_k], \quad \mu_k \in M, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Предел в (31) существует при выполнении любого из условий (21), (22) или (23). Эта задача содержит в качестве частного случая задачу достижимости за бесконечное время, исследованную Бертсекасом [10]. Задачи (30) и (31) возникают также при анализе последовательных игр с нулевой суммой.

3.1. Общие замечания и предположения

Рассмотрим N -шаговую задачу оптимизации:

$$\text{минимизировать } J_{N, \pi}(x) = (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x)$$

при условии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$,

где для любых функций $\mu \in M$, $J \in F$ и любого состояния $x \in S$ имеем

$$T_{\mu}(J)(x) = H[x, \mu(x), J], \quad T(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J).$$

Опыт работы с большим числом разнообразных задач последовательной оптимизации дает основание предположить, что оптимальная функция издержек за N шагов J_N^* удовлетворяет уравнению

$$J_N^* = \inf_{\pi \in \Pi} J_{N, \pi} = T^N(J_0),$$

и, следовательно, получается после N шагов алгоритма ДП. В нашей более общей постановке, однако, необходимо будет наложить дополнительные ограничения на функцию H для того, чтобы гарантировать это равенство. Рассмотрим следующие два предположения.

Предположение F.1. Если последовательность $\{J_k\} \subset F$ удовлетворяет условию $J_{k+1} \leq J_k$ для всех k и $H(x, u, J_1) < \infty$ для любых состояний $x \in S$ и управлений $u \in U(x)$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(x, u, J_k) = H(x, u, \lim_{k \rightarrow \infty} J_k) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x).$$

Предположение F.2. Существует такое число $\alpha \in (0, \infty)$, что для всех чисел $r \in (0, \infty)$ и любой функции $J \in F$ имеем

$$H(x, u, J) \leq H(x, u, J + r) \leq H(x, u, J) + \alpha r \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x).$$

Рассмотрим также возможно более сложное предположение, которое позволит получить более сильный результат о существовании почти оптимальной стратегии (предложение 3.2), чем это может дать предположение F.2. Это предположение, как будет показано в последнем разделе этой главы, выполняется для задачи стохастического оптимального управления из п. 2.3.3.

Предположение F.3. Существует число $\beta \in (0, \infty)$ такое, что если функция $J \in F$, последовательность $\{J_n\} \subset F$ и последовательность $\{\epsilon_n\} \subset R$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty, \quad \epsilon_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n, \quad J \leq J_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$J_n(x) \leq \begin{cases} J(x) + \epsilon_n, & n = 1, 2, \dots, x \in S \\ J_{n-1}(x) + \epsilon_n, & n = 2, 3, \dots, x \in S \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{при } J(x) > -\infty, \\ \text{при } J(x) = -\infty, \end{array}$$

$$H(x, u, J_1) < \infty \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x),$$

то существует последовательность $\{\mu_n\} \subset M$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J_n) = T(J),$$

$$T_{\mu_n}(J_n)(x) \leq$$

$$\begin{cases} T(J)(x) + \beta \epsilon_n, & n = 1, 2, \dots, x \in S \text{ при } T(J)(x) > -\infty, \\ T_{\mu_{n-1}}(J_{n-1})(x) + \beta \epsilon_n, & n = 2, 3, \dots, x \in S \text{ при } T(J)(x) = -\infty. \end{cases}$$

Каждый из дальнейших результатов будет требовать самое большее одного из указанных предположений. Как будет показано в разделе 3.3, по крайней мере одно из этих предположений выполняется для каждой из специальных моделей, рассмотренных в разделе 2.3.

3.2. Основные результаты

Центральный вопрос, относящийся к задаче с конечным горизонтом, состоит в проверке равенства $J_N^* = T^N(J_0)$, так как в случае равенства оптимальная функция издержек за N шагов J_N^* может быть получена посредством алгоритма ДП, последовательно дающего значения $T(J_0)$, $T^2(J_0)$, ... К этому примыкает вопрос о существовании оптимальной или почти оптимальной стратегии. Результаты этого раздела дают условия, при которых ответ на вопросы положительны.

Предложение 3.1.

(а) Пусть выполнено предположение F.1 и предположим, что $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для любого состояния $x \in S$ и любой стратегии $\pi \in \Pi$ и $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$.

(б) Пусть выполнено предположение F.2 и предположим, что $J_k^*(x) > -\infty$ для любого состояния $x \in S$ и $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$ и для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная при горизонте N стратегия, т.е. стратегия $\pi_\epsilon \in \Pi$ такая, что $J_N^* \leq J_{N,\pi_\epsilon} \leq J_N^* + \epsilon$.

Доказательство.

(а) Для каждого $k = 0, 1, \dots, N-1$ рассмотрим последовательность $\{\mu_k^i\} \subset M$ такую, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{\mu_k^i}[T^{N-k-1}(J_0)] = T^{N-k}(J_0), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$T_{\mu_k^i}[T^{N-k-1}(J_0)] \geq T_{\mu_{k+1}^i}[T^{N-k-1}(J_0)],$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 0, 1, \dots$$

Используя предположение F.1 и предположение $J_{k,\pi}(x) < \infty$, найдем

$$J_N^* \leq \inf_{i_0} \dots \inf_{i_{N-1}} (T_{\mu_{i_0}^0} \dots T_{\mu_{i_{N-1}}^{N-1}})(J_0) =$$

$$= \inf_{i_0} \dots \inf_{i_{N-2}} (T_{\mu_{i_0}^0} \dots T_{\mu_{i_{N-2}}^{N-2}}) \left[\inf_{i_{N-1}} T_{\mu_{i_{N-1}}^{N-1}}(J_0) \right] =$$

$$= \inf_{i_0} \dots \inf_{i_{N-2}} (T_{\mu_{i_0}^0} \dots T_{\mu_{i_{N-2}}^{N-2}}) T(J_0) = T^N(J_0),$$

где последнее равенство получается повторением приема, использованного для вывода предыдущих равенств. С другой стороны, из определений главы 2 ясно, что $T^N(J_0) \leq J_N^*$, и, следовательно, $J_N^* = T^N(J_0)$.

(б) Воспользуемся индукцией. Для $N = 1$ результат очевиден. Предположим, что он справедлив и для $N = k$, т.е. что $J_k^* = T^k(J_0)$ и что для любого числа $\epsilon > 0$ найдется стратегия $\pi_\epsilon \in \Pi$, для которой $J_{k, \pi_\epsilon} \leq J_k^* + \epsilon$. Используя предположение F 2, получим, что

$$J_{k+1}^* \leq T_\mu(J_{k, \pi_\epsilon}) \leq T_\mu(J_k^*) + \alpha\epsilon$$

для любого $\mu \in M$. Следовательно, $J_{k+1}^* \leq T(J_k^*)$, откуда, согласно предположению индукции, $J_{k+1}^* \leq T^{k+1}(J_0)$. Но, с другой стороны, ясно, что $T^{k+1}(J_0) \leq J_{k+1}^*$, и, следовательно, $T^{k+1}(J_0) = J_{k+1}^*$. Пусть, далее, для любого $\bar{\epsilon} > 0$ стратегия $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$ такова, что $J_{k, \bar{\pi}} \leq J_k^* + (\bar{\epsilon}/2\alpha)$, и пусть отображение $\bar{\mu} \in M$ таково, что $T_{\bar{\mu}}(J_k^*) \leq T(J_k^*) + (\bar{\epsilon}/2)$. Рассмотрим стратегию $\bar{\pi}_{\bar{\epsilon}} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$. Тогда справедливо соотношение

$$\begin{aligned} J_{k+1, \bar{\pi}_{\bar{\epsilon}}} &= T_{\bar{\mu}}(J_{k, \bar{\pi}}) \leq T_{\bar{\mu}}(J_k^*) + (\bar{\epsilon}/2) \leq \\ &\leq T(J_k^*) + \bar{\epsilon} = J_{k+1}^* + \bar{\epsilon}. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 3.1 (а) можно усилить, если воспользоваться вместо предположения F. 1 следующим условием.

Предположение F.1'. Функция J_0 удовлетворяет неравенству

$$J_0(x) \geq H(x, u, J_0) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x),$$

и если последовательность $\{J_k\} \subset F$ такова, что $J_{k+1} \leq J_k \leq J_0$ для всех k , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(x, u, J_k) = H(x, u, \lim_{k \rightarrow \infty} J_k) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x).$$

Следующее следствие получается дословным повторением доказательства предложения 3.1 (а).

Следствие 3.1.1. Пусть выполняется предположение F.1'. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$.

Предложение 3.1 и следствие 3.1.1 могут не выполняться, если их предположения слегка ослабить.

Контрпример 1. Положим $S = \{0\}$, $C = U(0) = (-1, 0]$, $J_0(0) = 0$, $H(0, u, J) = u$ при $-1 < J(0)$, $H(0, u, J) = J(0) + u$ при $J(0) \leq -1$. Тогда $(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0) = \mu_0(0)$ и $J_N^*(0) = -1$, хотя $T^N(J_0)(0) = -N$ для любого N . Здесь предположения о том, что $J_{k, \pi}(0) < \infty$ и $J_k^*(0) > -\infty$ выполняются, но предположения F. 1, F.1' и F.2 нарушены.

Контрпример 2. Положим $S = \{0, 1\}$, $C = U(0) = U(1) = (-\infty, 0]$, $J_0(0) = J_0(1) = 0$, $H(0, u, J) = u$ при $J(1) = -\infty$, $H(0, u, J) = 0$ при $J(1) > -\infty$ и $H(1, u, J) = u$. Тогда $(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(0) = 0$, $(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(1) = \mu_0(1)$ для всех $N \geq 1$. Следовательно, $J_N^*(0) = 0$, $J_N^*(1) = -\infty$. С другой стороны, мы имеем $T^N(J_0)(0) = T^N(J_0)(1) = -\infty$ для всех $N \geq 2$. Здесь предположение F.2 выполнено, а предположения F.1, F.1' и условие $J_{k, \pi}(x) < \infty$ и $J_k^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$ нарушены.

Следующий контрпример — это задача стохастического оптимального управления со счетным пространством возмущений из п. 2.3.2. Будем использовать введенные там обозначения.

Контрпример 3. Пусть $N = 2$, $S = \{0, 1\}$, $C = U(0) = U(1) = R$, $W = \{2, 3, \dots\}$, $p(w = k | x, u) = k^{-2} (\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2})^{-1}$ при $k = 2, 3, \dots$, $x \in S$, $u \in C$, $f(0, u, w) = f(1, u, w) = 1$ при всех $u \in C$, $w \in W$, $g(0, u, w) = w$, $g(1, u, w) = u$ для всех $u \in C$, $w \in W$. Непосредственные вычисления показывают, что $J_2^*(0) = \infty$, $J_2^*(1) = -\infty$, в то время как $T^2(J_0)(0) = -\infty$, $T^2(J_0)(1) = -\infty$. Здесь предположения F.1 и F.2 выполняются, но предположение F.1' и предположения о том, что $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для всех x , π , k и $J_k^*(x) > -\infty$ для x и k , нарушены.

В следующем контрпримере имеем задачу детерминированного оптимального управления из п. 2.3.1. Здесь также используются введенные там обозначения.

Контрпример 4. Пусть $N = 2$, $S = \{0, 1, \dots\}$, $C = U(x) = (0, \infty)$ для всех $x \in S$, $f(x, u) = 0$ для всех $x \in S$, $u \in C$, $g(0, u) = -u$ для всех $u \in U(0)$, $g(x, u) = x$ для всех $u \in U(x)$, если $x \neq 0$. Тогда для $\pi \in \Pi$ и $x \neq 0$ получим $J_{2,\pi}(x) = x - \mu_1(0)$, так что $J_2^*(x) = -\infty$ для всех $x \in S$. С другой стороны, ясно, что для любого $\epsilon > 0$ не существует двухшаговой ϵ -оптимальной стратегии. Здесь предположения F.1, F.2 и предположение о том, что $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для всех x , π , k выполнены, и действительно, $J_2^*(x) = T^2(J)(x) = -\infty$ для всех $x \in S$. Однако предположение о том, что $J_k^*(x) > -\infty$ для всех x и k , нарушено.

Как показывает контрпример 4, ϵ -оптимальная на горизонте N стратегия может не существовать, если $J_k^*(x) = -\infty$ для некоторых k и $x \in S$. Следующее предложение устанавливает существование при соответствующих условиях последовательности почти оптимальных стратегий, функции издержек которых сходятся к оптимальной функции издержек.

Предложение 3.2. Пусть выполнено предположение F.3, и пусть $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для любых состояний $x \in S$, стратегий $\pi \in \Pi$ и $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$. Более того, для любой последовательности положительных чисел $\{\epsilon_n\}$, $\epsilon_n \downarrow 0$, существует последовательность стратегий $\{\pi_n\}$, которая $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемо сходится к оптимальности. В частности, если, кроме того, $J_N^*(x) > -\infty$ для любого состояния $x \in S$, то для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная стратегия.

Доказательство. Докажем по индукции, что для $K \leq N$ выполняется равенство $J_K^* = T^K(J_0)$ и, более того, если даны число K и последовательность $\{\epsilon_n\}$ с $\epsilon_n \downarrow 0$, $\epsilon_n > 0$, то существует последовательность $\{\pi_n\} \subset \Pi$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{K,\pi_n} = J_K^*, \quad (1)$$

и при каждом n

$$J_{K,\pi_n}(x) \leq \begin{cases} J_K^*(x) + \epsilon_n & \forall x \in S \quad \text{при } J_K^*(x) > -\infty, \\ J_{K,\pi_{n-1}}(x) + \epsilon_n & \forall x \in S \quad \text{при } J_K^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (2)$$

$$J_{K,\pi_{n-1}}(x) + \epsilon_n \quad \forall x \in S \quad \text{при } J_K^*(x) = -\infty. \quad (3)$$

Покажем сначала, что это утверждение справедливо для $K = 1$. Действительно, имеем

$$J_1^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{1,\pi}(x) = \inf_{\mu \in M} H[x, \mu(x), J_0] = T(J_0)(x) \quad \forall x \in S.$$

Также ясно, что для данной последовательности $\{\epsilon_n\}$ существует последовательность $\{\pi_n\} \subset \Pi$, удовлетворяющая соотношениям (1)–(3) при $K = 1$.

Предположим теперь, что наше утверждение справедливо при $K = N - 1$. Пусть β — число, определенное в предположении F.3. Рассмотрим последо-

вательность $\{\epsilon_n\} \subset R$ с $\epsilon_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$, и пусть последовательность $\{\hat{\pi}_n\} \subset \Pi$, $\hat{\pi}_n = \{\mu_1^n, \mu_2^n, \dots\}$, такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{N-1, \hat{\pi}_n} = J_{N-1}^*, \quad (4)$$

$$J_{N-1, \hat{\pi}_n}(x) \leq \begin{cases} J_{N-1}^*(x) + \beta^{-1} \epsilon_n & \forall x \in S \text{ при } J_{N-1}^*(x) > -\infty, \\ J_{N-1, \hat{\pi}_{n-1}}(x) + \beta^{-1} \epsilon_n & \forall x \in S \text{ при } J_{N-1}^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (5)$$

$$J_{N-1, \hat{\pi}_{n-1}}(x) + \beta^{-1} \epsilon_n \quad \forall x \in S \text{ при } J_{N-1}^*(x) = -\infty. \quad (6)$$

Предположение о том, что $J_{k, \pi}(x) < \infty$ для любого состояния $x \in S$ и любой стратегии $\pi \in \Pi$, $k = 1, 2, \dots, N$, гарантирует, что

$$H(x, u, J_{N-1, \hat{\pi}_1}) < \infty \quad \forall x \in S, u \in U(x). \quad (7)$$

Без ограничения общности, можно предположить, что $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. Тогда из предположения F.3 и равенства (4) будет следовать, что существует последовательность $\{\mu_0^n\} \subset M$ такая, что имеют место соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_0^n}(J_{N-1, \hat{\pi}_n}) = T(J_{N-1}^*), \quad (8)$$

и для любого n

$$T_{\mu_0^n}(J_{N-1, \hat{\pi}_n})(x) \leq$$

$$\leq \begin{cases} T(J_{N-1}^*)(x) + \epsilon_n, & \text{если } T(J_{N-1}^*)(x) > -\infty, \end{cases} \quad (9)$$

$$T_{\mu_0^{n-1}}(J_{N-1, \hat{\pi}_{n-1}})(x) + \epsilon_n, \quad \text{если } T(J_{N-1}^*)(x) = -\infty. \quad (10)$$

Согласно предположению индукции $J_{N-1}^* = T^{N-1}(J_0)$. Кроме того, ясно, что $T^N(J_0) \leq J_N^*$. Следовательно,

$$T(J_{N-1}^*) = T^N(J_0) \leq J_N^*. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$J_N^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_0^n}(J_{N-1, \hat{\pi}_n}). \quad (12)$$

Объединяя вместе соотношения (8), (11) и (12), получим

$$J_N^* = T(J_{N-1}^*) = T^N(J_0). \quad (13)$$

Пусть $\pi_n = (\mu_0^n, \mu_1^n, \mu_2^n, \dots)$. Тогда из соотношений (8)–(10) и (13) получим $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{N, \pi_n} = J_N^*$, и для любого n

$$J_{N, \pi_n}(x) \leq \begin{cases} J_N^*(x) + \epsilon_n & \forall x \in S \text{ при } J_N^*(x) > -\infty, \\ J_{N, \pi_{n-1}}(x) + \epsilon_n & \forall x \in S \text{ при } J_N^*(x) = -\infty, \end{cases}$$

что завершает индукцию. $\square$

Несмотря на необходимость различных предположений, чтобы гарантировать равенство $J_N^* = T^N(J_0)$, имеет место следующий результат, устанавливающий пригодность алгоритма ДП для построения оптимальных стратегий при единственном предположении монотонности отображения H .

Предложение 3.3. Стратегия $\pi^* = \{\mu_0^*, \mu_1^*, \dots\}$ является равномерно оптимальной при горизонте N тогда и только тогда, когда

$$T_{\mu_k^*} T^{N-k-1}(J_0) = T^{N-k}(J_0), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть равенство (14) имеет место. Тогда для $k = 0, 1, \dots, N-1$ справедливо равенство

$$(T_{\mu_k}^* \dots T_{\mu_{N-1}}^*)(J_0) = T^{N-k}(J_0).$$

С другой стороны, $J_{N-k}^* \leq (T_{\mu_k}^* \dots T_{\mu_{N-1}}^*)(J_0)$, в то время как $T^{N-k}(J_0) \leq J_{N-k}^*$. Следовательно, $J_{N-k}^* = (T_{\mu_k}^* \dots T_{\mu_{N-1}}^*)(J_0)$ и π^* — равномерно оптимальная стратегия при горизонте N .

Обратно, пусть π^* — равномерно оптимальная при горизонте N стратегия. Тогда $T(J_0) = J_1^* = T_{\mu_{N-1}}^*(J_0)$ по определению. Для любого отображения $\mu \in M$ справедливо равенство $(T_\mu T)(J_0) = (T_\mu T_{\mu_{N-1}}^*)(J_0)$, откуда

$$T^2(J_0) = \inf_{\mu \in M} (T_\mu T)(J_0) = \inf_{\mu \in M} (T_\mu T_{\mu_{N-1}}^*)(J_0) \geq$$

$$> J_2^* = (T_{\mu_{N-2}}^* T_{\mu_{N-1}}^*)(J_0) \geq T^2(J_0).$$

Следовательно,

$$T^2(J_0) = J_2^* = (T_{\mu_{N-2}}^* T_{\mu_{N-1}}^*)(J_0) = (T_{\mu_{N-2}}^* T)(J_0).$$

Продолжая аналогичным образом, получим все равенства (14). $\square$

Как следствие предложения 3.3 имеем такой результат.

Следствие 3.3.1.

(а) *Равномерно оптимальная при горизонте N стратегия существует тогда и только тогда, когда инфимум в соотношении*

$$T^{k+1}(J_0)(x) = \inf_{u \in U(x)} H[x, u, T^k(J_0)]$$

достигается для всех состояний $x \in S$ и $k = 0, 1, \dots, N-1$.

(б) *Если равномерно оптимальная при горизонте N стратегия существует, то $J_N^* = T^N(J_0)$.*

Установим теперь условия существования равномерно оптимальной при горизонте N стратегии. Для этого нам понадобится предположение о компактности. Если C есть хаусдорфово топологическое пространство, то будем говорить, что подмножество $U \subset C$ компактно, если любое семейство открытых множеств, покрывающее U , содержит конечное подсемейство, тоже покрывающее U . Пустое множество, в частности, компактно. Любая последовательность $\{u_n\}$, принадлежащая компактному множеству $U \subset C$, имеет по крайней мере одну предельную точку $\bar{u} \in U$, т.е. точку, любая (открытая) окрестность которой содержит бесконечное число элементов последовательности $\{u_n\}$. Далее, все предельные точки последовательности $\{u_n\}$ принадлежат U . Если $\{U_n\}$ — последовательность непустых компактных подмножеств из C и $U_n \supset U_{n+1}$ для всех n , то пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ не пусто и компактно. Эти факты лежат в основе следующей леммы, которая будет весьма полезна в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть C — хаусдорфово пространство, $f: C \rightarrow R^*$ — некоторая функция и U — подмножество из C . Предположим, что множество $U(\lambda)$, определяемое как

$$U(\lambda) = \{u \in U \mid f(u) \leq \lambda\}, \quad (15)$$

компактно для любого числа $\lambda \in R$. Тогда функция f достигает минимума на U .

Доказательство. Если $f(u) = \infty$ для всех $u \in U$, то утверждение очевидно. Если $f^* = \inf\{f(u) \mid u \in U\}$, то возьмем числовую последова-

тельность $\{\lambda_n\}$ такую, что $\lambda_n > \lambda_{n+1}$ для всех n и $\lambda_n \rightarrow f^*$. Тогда множества $U(\lambda_n)$ не пусты, компактны и удовлетворяют включению $U(\lambda_n) \supset U(\lambda_{n+1})$ для всех n . Следовательно, пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} U(\lambda_n)$ не пусто и компактно. Пусть u^* — любая точка из этого пересечения. Тогда $u^* \in U$ и $f(u^*) \leq \lambda_n$ для всех n , откуда следует, что $f(u^*) \leq f^*$. Следовательно, функция f достигает минимума на U в точке u^* . $\square$

Непосредственное применение следствия 3.3.1 и леммы 3.1 приводит к следующему предположению.

Предложение 3.4. Пусть пространство управлений C — хаусдорфово пространство, и предположим, что для любых $x \in S, \lambda \in R$ и $k = 0, 1, \dots, N-1$ множество

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in U(x) \mid H[x, u, T^k(J_0)] \leq \lambda\} \quad (16)$$

компактно. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$ и существует равномерно оптимальная при горизонте N стратегия.

Компактность множеств $U_k(x, \lambda)$ может быть установлена в ряде важных специальных случаев. В качестве иллюстрации дадим два набора предположений, которые гарантируют компактность $U_k(x, \lambda)$ для отображения

$$H(x, u, J) = g(x, u) + \alpha(x, u)J[f(x, u)],$$

соответствующего задаче детерминированного оптимального управления (п. 2.3.1).

Предположим, что $0 \leq \alpha(x, u), b \leq g(x, u) < \infty$ для некоторого числа $b \in R$ и для любых $x \in S, u \in U(x)$, и пусть $J_0 \equiv 0$. Тогда компактность $U_k(x, \lambda)$ обеспечена, если:

(а) $S = R^n$ (n -мерное евклидово пространство), $C = R^m, U(x) \equiv C$; функции f, g, α непрерывны по (x, u) и $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k, u_k) = \infty$ для любой ограниченной последовательности $\{x_k\}$ и любой последовательности $\{u_k\}$ с $|u_k| \rightarrow \infty$ ($|\cdot|$ — норма в R^m).

(б) $S = R^n, C = R^m$, функции f, g и α непрерывны, множество $U(x)$ компактно и не пусто для любого $x \in R^n$, и $U(\cdot)$ — непрерывное точечно-множественное отображение из R^n в пространство всех непустых компактных множеств в R^m . Метрика в таком пространстве задается формулой (3) из приложения В.

Доказательство состоит в проверке непрерывности функций $T^k(J_0)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, что в свою очередь влечет компактность множеств $U_k(x, \lambda)$ из выражения (16). Результаты, дополняющие предложение 3.4, будут даны в части II (см. следствие 8.5.2 и предложение 8.6).

3.3. Применение к частным случаям

Применим теперь результаты предыдущего раздела к моделям, описанным в разделе 2.3.

Стохастическое оптимальное управление — постановка задачи с использованием внешнего интеграла

Предложение 3.5. Отображение

$$H(x, u, J) = E^*\{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] \mid x, u\} \quad (17)$$

из п. 2.3.3 удовлетворяет предположения F.2 и F.3.

Доказательство. Имеем

$$H(x, u, J) = \int^* \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)]\} p(dw | x, u),$$

где $\int^*$ обозначает внешний интеграл, определенный в приложении А. Из леммы А.3 (б) получаем

$$H(x, u, J) \leq H(x, u, J+r) \leq H(x, u, J) + 2\alpha r$$

для всех $x \in S$, $u \in C$, $J \in F$, $r > 0$. Следовательно, предположение F. 2 выполнено.

Проверим теперь предположение F. 3. Пусть функция $J \in F$, $\{J_n\} \subset F$, последовательность $\{\epsilon_n\} \subset R$ удовлетворяет условиям $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ и $\epsilon_n > 0$; кроме того, для любого n имеют место соотношения

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n, \quad J \leq J_n, \quad (18)$$

$$J_n(x) \leq \begin{cases} J(x) + \epsilon_n, & \text{если } J(x) > -\infty, \end{cases} \quad (19)$$

$$J_n(x) \leq \begin{cases} J_{n-1}(x) + \epsilon_n, & \text{если } J(x) = -\infty, \end{cases} \quad (20)$$

$$H(x, u, J_1) < \infty \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x). \quad (21)$$

Пусть последовательность $\{\bar{\mu}_n\} \subset M$ такова, что для любого n

$$T_{\bar{\mu}_n}(J)(x) \leq \begin{cases} T(J)(x) + \epsilon_n, & \text{если } T(J)(x) > -\infty, \end{cases} \quad (22)$$

$$T_{\bar{\mu}_n}(J)(x) \leq \begin{cases} -1/\epsilon_n, & \text{если } T(J)(x) = -\infty, \end{cases} \quad (23)$$

$$T_{\bar{\mu}_n}(J) \leq T_{\bar{\mu}_{n-1}}(J). \quad (24)$$

Рассмотрим множество

$$A(J) = \{x \in S \mid \text{существует } u \in U(x)$$

$$\text{и } p^*(\{w \mid J[f(x, u, w)] = -\infty\} \mid x, u) > 0\},$$

где p^* означает внешнюю меру, построенную по мере p (см. приложение А).

Пусть функция $\bar{\mu} \in M$ такова, что

$$p^*(\{w \mid J[f(x, \bar{\mu}(x), w)] = -\infty\} \mid x, \bar{\mu}(x) > 0) \quad \forall x \in A(J). \quad (25)$$

Определим для всех n функции

$$\mu_n(x) = \begin{cases} \bar{\mu}(x), & \text{если } x \in A(J), \\ \bar{\mu}_n(x), & \text{если } x \notin A(J). \end{cases} \quad (26)$$

Покажем, что определенная таким образом последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет предположению F. 3 при $\beta = 1 + 2\alpha$.

Для состояния $x \in A(J)$ из следствия А. 1.1 и соотношений (18) – (21) имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J_n)(x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} T_{\bar{\mu}}(J_n)(x) = \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int^* \{g[x, \bar{\mu}(x), w] + \alpha J_n[f(x, \bar{\mu}(x), w)]\} p(dw \mid x, \bar{\mu}(x)) = \\ &= \int^* \{g[x, \bar{\mu}(x), w] + \alpha J[f(x, \bar{\mu}(x), w)]\} p(dw \mid x, \bar{\mu}(x)). \end{aligned}$$

Из леммы А.3 (ж) и из того факта, что $T_{\mu}(J)(x) < \infty$ [ср. условия (18) и (21)], следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J_n)(x) = -\infty \leq T(J)(x). \quad (27)$$

Для $x \notin A(J)$ имеем

$$p^*(\{w | J[f(x, \mu_n(x), w)] = -\infty\} | x, \mu_n(x)) = 0$$

при всех n . Выберем множество $B_n \in \mathcal{F}$, содержащее $\{w | J[f(x, \mu_n(x), w)] = -\infty\}$ и удовлетворяющее условию

$$p(B_n | x, \mu_n(x)) = 0 \quad \forall n.$$

Используя лемму А.3 (д) и (б) и условие (19), получим

$$\begin{aligned} T_{\mu_n}(J_n)(x) &= \int^* \chi_{W-B_n}(w) \{g[x, \mu_n(x), w] + \\ &+ \alpha J_n[f(x, \mu_n(x), w)]\} p(dw | x, \mu_n(x)) \leq \\ &\leq \int^* \chi_{W-B_n}(w) \{g[x, \mu_n(x), w] + \alpha J[f(x, \mu_n(x), w)]\} p(dw | x, \mu_n(x)) + \\ &+ 2\alpha\epsilon_n = T_{\mu_n}(J)(x) + 2\alpha\epsilon_n. \end{aligned} \quad (28)$$

Следовательно, для $x \notin A(J)$ из соотношений (28), (22) и (23) вытекает, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J_n)(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J)(x) = T(J)(x).$$

Используя еще и соотношение (27), получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J_n)(x) \leq T(J)(x) \quad \forall x \in S,$$

а так как $T_{\mu_n}(J_n) \geq T(J)$ для всех n , то это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J_n) = T(J). \quad (29)$$

Если состояние x такое, что $T(J)(x) > -\infty$, то из соотношений (27) и (29) следует, что $x \notin A(J)$. И мы получаем из соотношений (28), (22) и леммы А.3 (б), что

$$T_{\mu_n}(J_n)(x) \leq T_{\mu_n}(J)(x) + 2\alpha\epsilon_n \leq T(J)(x) + (1 + 2\alpha)\epsilon_n, \quad (30)$$

если $T(J)(x) > -\infty$.

Если состояние x такое, что $T(J)(x) = -\infty$, то существуют две возможности: (а) $x \notin A(J)$ и (б) $x \in A(J)$. Если $x \notin A(J)$, то из соотношений (28), (24) и (18) следует, что

$$\begin{aligned} T_{\mu_n}(J_n)(x) &\leq T_{\mu_n}(J)(x) + 2\alpha\epsilon_n \leq T_{\mu_{n-1}}(J)(x) + 2\alpha\epsilon_n \leq \\ &\leq T_{\mu_{n-1}}(J_{n-1})(x) + 2\alpha\epsilon_n. \end{aligned} \quad (31)$$

Если $x \in A(J)$, то из соотношений (18) – (20) и леммы А.3 (б) имеем

$$\begin{aligned} T_{\mu_n}(J_n)(x) &= \int^* \{g[x, \bar{\mu}(x), w] + \alpha J_n[f(x, \bar{\mu}(x), w)]\} p(dw | x, \bar{\mu}(x)) \leq \\ &\leq \int^* \{g[x, \bar{\mu}(x), w] + \alpha J_{n-1}[f(x, \bar{\mu}(x), w)]\} p(dw | x, \bar{\mu}(x)) + \\ &+ 2\alpha\epsilon_n = T_{\mu_{n-1}}(J_{n-1})(x) + 2\alpha\epsilon_n. \end{aligned} \quad (32)$$

Из соотношений (29) — (32) следует теперь, что последовательность $\{\mu_n\}$ удовлетворяет предположению F. 3 при $\beta = 1 + 2\alpha$. $\square$

Как упоминалось ранее, отображение (17) содержит, как частные случаи, отображения из пп. 2.3.1 и 2.3.2. Читатель легко может проверить предположение F. 1 для этих отображений, используя теорему о монотонном предельном переходе для обычного интеграла.

Непосредственное применение результатов предыдущего раздела и предложения 3.5 приводит к такому следствию.

Следствие 3.5.1. Пусть H — отображение (17), и пусть $J_0(x) = 0$ для всех $x \in S$.

(а) Если $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для всех $x \in S$, $\pi \in \Pi$ и $k = 1, 2, \dots, N$, то $J_N^* = T^N(J_0)$ и для любой последовательности $\{\epsilon_n\}$ с $\epsilon_n \downarrow 0$, $\epsilon_n > 0$ для всех n , существует последовательность стратегий $\{\pi_n\}$, $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемо сходящаяся к оптимальности. В частности, если еще и $J_N^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$, то для любого $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная стратегия.

(б) Если $J_k^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$, $k = 1, 2, \dots, N$, то $J_N^* = T^N(J_0)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная при горизонте N стратегия.

(в) Предложения 3.3 и 3.4 и следствие 3.3.1 применимы.

Как показывает контрпример 3 из предыдущего раздела, в задаче стохастического оптимального управления может иметь место неравенство $J_N^* \neq T^N(J_0)$, если предположения (а) и (б) следствия 3.5.1 не выполняются: Конечно, для некоторых классов задач можно гарантировать выполнение равенства $J_N^* = T^N(J_0)$ другими способами. Например, если задача такова, что существование равномерно оптимальной при горизонте N стратегии известно, то равенство $J_N^* = T^N(J_0)$ получается из следствия 3.3.1 (б). Важным частным случаем, где равенство $J_N^* = T^N(J_0)$ справедливо без всяких дополнительных предположений, является задача детерминированного оптимального управления из п. 2.3.1. Этот факт может быть легко проверен читателем с помощью тех же, по существу, рассуждений, что использовались при доказательстве предложения 3.1 (а). Однако если $J_N^*(x) = -\infty$ для некоторых состояний $x \in S$, то даже в детерминированной задаче для данного ϵ может не существовать ϵ -оптимальная на горизонте N стратегия (см. контрпример 4).

Стохастическое оптимальное управление — мультипликативный функционал издержек

Предложение 3.6. Отображение

$$H(x, u, J) = E \{g(x, u, w) J[f(x, u, w)] \mid x, u\} \quad (33)$$

из п. 2.3.4 удовлетворяет предположению F. 1. Если существует число $b \in R$ такое, что $0 \leq g(x, u, w) \leq b$ для всех $x \in S$, $u \in U(x)$, $w \in W$, то H удовлетворяет предположению F. 2.

Доказательство. Предположение F. 1 удовлетворяется в силу теоремы о монотонном предельном переходе для обычного интеграла (напомним, что множество W счетно). Кроме того, если $0 \leq g(x, u, w) \leq b$, то для любой функции $J \in F$ и произвольного $r > 0$ имеем

$$\begin{aligned} H(x, u, J+r) &= E \{g(x, u, w) (J[f(x, u, w)] + r) \mid x, u\} = \\ &= E \{g(x, u, w) J[f(x, u, w)] \mid x, u\} + r E \{g(x, u, w) \mid x, u\}. \end{aligned}$$

Таким образом, предположение F. 2 выполняется при $\alpha = b$. $\square$

Объединяя предложения 3.6 и 3.1, получаем такое следствие.

Следствие 3.6.1. Пусть H — отображение (33) и $J_0(x) = 1$ для всех $x \in S$.

(а) Если $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для всех $x \in S$, $\pi \in \Pi$, $k = 1, 2, \dots, N$, то $J_N^* = T^N(J_0)$.
 (б) Если существует число $b \in R$ такое, что $0 \leq g(x, u, w) \leq b$ для всех $x \in S$, $u \in U(x)$, $w \in W$, то $J_N^* = T^N(J_0)$ и существует ϵ -оптимальная при горизонте N стратегия.

(в) Предложения 3.3 и 3.4 и следствие 3.3.1 применимы.

Рассмотрим теперь два контрпримера, которые показывают, что утверждения следствия 3.6.1 (а) и (б) могут не выполняться, если соответствующие предположения нарушены.

Контрпример 5. Этот пример аналогичен контрпримеру 3, только $C = (0, \infty)$ вместо $C = R$ (и, конечно, $J_0(0) = J_0(1) = 1$ вместо $J_0(0) = J_0(1) = 0$). Непосредственное вычисление показывает, что $J_2^*(0) = \infty$, $J_2^*(1) = 0$, в то время, как $T^2(J_0)(0) = T^2(J_0)(1) = 0$. Здесь предположение о том, что $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для всех x , π , k не выполняется, а функция g не ограничена сверху.

Контрпример 6. Этот пример аналогичен контрпримеру 4, за исключением определения функции g . Положим $g(0, u) = u$ для всех $u \in U(0)$ и $g(x, u) = x$ для всех $u \in U(x)$, если $x \neq 0$. Тогда для любой стратегии $\pi \in \Pi$ имеем $J_{2,\pi}(x) = x\mu_1(0)$ для $x \neq 0$ и $J_2^*(x) = 0$ для всех $x \in S$. С другой стороны, для всех $\epsilon > 0$ не существует ϵ -оптимальной при горизонте 2 стратегии. Здесь предположение о том, что $J_{k,\pi}(x) < \infty$ для всех x , π , k выполнено, и действительно справедливо равенство $J_2^*(x) = T^2(J_0)(x) = 0$ для всех $x \in S$. Однако функция g не ограничена сверху.

Минимаксное управление

Предложение 3.7. Отображение

$$H(x, u, J) = \sup_{w \in W(x, u)} \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)]\} \quad (34)$$

из раздела 2.3.5 удовлетворяет предположению F. 2.

Доказательство. Для $r > 0$ и $J \in F$ имеем

$$H(x, u, J + r) = \sup_{w \in W(x, u)} \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] + \alpha r\} =$$

$$= H(x, u, J) + \alpha r. \quad \square$$

Следствие 3.7.1. Пусть H — отображение (34) и $J_0(x) = 0$ для всех $x \in S$.

(а) Если $J_k^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$, $k = 1, 2, \dots, N$, то $J_N^* = T^N(J_0)$ и для любого $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная при горизонте N стратегия.

(б) Предложения 3.3. и 3.4 и следствие 3.3.1 применимы.

Если $J_k^*(x) = -\infty$ для какого-то состояния $x \in S$, то, очевидно, возможно, что для некоторого $\epsilon > 0$ не существует ϵ -оптимальной при горизонте N стратегии, поскольку это имеет место даже для задач детерминированного оптимального управления (контрпример 4). Также можно построить примеры, очень похожие на контрпример 3, из которых видно, что может иметь место неравенство $J_N^* \neq T^N(J_0)$, если $J_k^*(x) = -\infty$ для некоторых x и k .

4.1. Общие замечания и предположения

Рассмотрим задачу с бесконечным горизонтом:

$$\text{минимизировать } J_{\pi}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x)$$

при условии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$.

Следующее предположение мотивировано тем, что в задачах стохастического оптимального управления с дисконтированием и с ограниченными издержками на каждом шаге оператор является сжимающим (ср. [12], гл. 6).

Предположение С (предположение сжимаемости). Существует замкнутое подмножество $\bar{B}$ пространства B (банахова пространства всех ограниченных действительных функций на S с равномерной нормой) такое, что $J_0 \in \bar{B}$, и для всех функций $J \in \bar{B}$ и $\mu \in M$ функции $T(J)$ и $T_{\mu}(J)$ принадлежат $\bar{B}$. Далее, для любой стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \quad (1)$$

существует и является действительным числом для любого состояния $x \in S$. Сверх того, существуют положительное целое число m и скаляры ρ, α с $0 < \rho < 1, 0 < \alpha$, такие, что

$$\|T_{\mu}(J) - T_{\mu}(J')\| \leq \alpha \|J - J'\| \quad \forall \mu \in M, J, J' \in \bar{B}, \quad (2)$$

$$\|(T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{m-1}})(J) - (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{m-1}})(J')\| \leq \rho \|J - J'\|$$

$$\forall \mu_0, \dots, \mu_{m-1} \in M; J, J' \in \bar{B}. \quad (3)$$

Условие (3) означает, что отображение $T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{m-1}}$ является сжимающим отображением в $\bar{B}$ при любых $\mu_k \in M, k = 0, 1, \dots, m-1$. Когда $m = 1$, оператор T_{μ} является сжимающим для каждого $\mu \in M$. Заметим, что неравенство (2) требуется для более широкого множества функций, чем неравенство (3). Однако часто удобно принимать $\bar{B} = B$. Так обстоит дело в задачах из пп. 2.3.1, 2.3.2 и 2.3.5, если предположить, что $\alpha < 1$ и функция g равномерно ограничена сверху и снизу. Это будет показано в разделе 4.4. В других задачах, таких, например, как задача из п. 2.3.3, свойство сжимаемости (3) может быть проверено только на некотором подмножестве $B \neq \bar{B}$.

4.2. Результаты о существовании и сходимости

Следующее предложение содержит предварительные результаты.

Предложение 4.1. Пусть выполняется предположение С. Тогда:

(а) Для любой функции $J \in \bar{B}$ и любой стратегии $\pi \in \Pi$ имеем

$$J_{\pi} = \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J) \dots$$

(б) Для любого положительного целого числа N и любой функции $J \in \bar{B}$ имеем

$$\inf_{\pi \in \Pi} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J) = T^N(J)$$

и, в частности,

$$J_N^* = \inf_{\pi \in \Pi} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J_0) = T^N(J_0).$$

(в) Операторы T^m и T_μ^m , $\mu \in M$ являются сжимающими операторами в $\bar{B}$ с модулем ρ , т.е.

$$\|T^m(J) - T^m(J')\| \leq \rho \|J - J'\| \quad \forall J, J' \in \bar{B},$$

$$\|T_\mu^m(J) - T_\mu^m(J')\| \leq \rho \|J - J'\| \quad \forall J, J' \in \bar{B}, \quad \mu \in M.$$

Доказательство.

(а) Произвольное число $k \geq 0$ представим в виде $k = nm + q$, где q, n — неотрицательные целые числа и $0 \leq q < m$. Тогда для любых функций $J, J' \in \bar{B}$, используя неравенства (2) и (3), получим

$$\|(T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{k-1}})(J) - (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{k-1}})(J')\| \leq \rho^n \alpha^q \|J - J'\|$$

и, переходя к пределу при k (а следовательно, и n), стремящемуся к бесконечности, будем иметь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{k-1}})(J_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{k-1}})(J) \quad \forall J \in \bar{B}.$$

(б) Так как, по предположению, $T^k(J) \in \bar{B}$ при всех k , то $T^k(J)(x) > -\infty$ при всех $x \in S$ и k . Для произвольного числа $\epsilon > 0$ выберем функции $\bar{\mu}_k \in M$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, так, чтобы

$$T_{\bar{\mu}_{N-1}}(J) \leq T(J) + \epsilon,$$

$$(T_{\bar{\mu}_{N-2}} T)(J) \leq T^2(J) + \epsilon, \dots,$$

$$(T_{\bar{\mu}_0} T^{N-1})(J) \leq T^N(J) + \epsilon.$$

Используя неравенство (2), получим

$$T^N(J) \geq (T_{\bar{\mu}_0} T^{N-1}) - \epsilon \geq T_{\bar{\mu}_0} [(T_{\bar{\mu}_1} T^{N-2})(J) - \epsilon] - \epsilon \geq$$

$$\geq (T_{\bar{\mu}_0} T_{\bar{\mu}_1} T^{N-2})(J) - \alpha\epsilon - \epsilon \geq \dots \geq$$

$$\geq (T_{\bar{\mu}_0} T_{\bar{\mu}_1} \cdots T_{\bar{\mu}_{N-1}})(J) - \left(\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \epsilon \right) \geq$$

$$\geq \inf_{\pi \in \Pi} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J) - \left(\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \epsilon \right).$$

Так как $\epsilon > 0$ произвольно, отсюда следует, что

$$T^N(J) \geq \inf_{\pi \in \Pi} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J).$$

Обратное неравенство очевидно, и утверждение (б) доказано.

(в) Тот факт, что T_μ^m — сжимающий оператор, непосредственно вытекает из неравенства (3). Из (3) также следует, что

$$(T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{m-1}})(J) \leq (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{m-1}})(J') + \rho \|J - J'\|$$

для всех $\mu_k \in M$, $k = 0, 1, \dots, m-1$ и $J, J' \in \bar{B}$. Взяв инфимум от обеих частей по $\mu_k \in M$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, и используя утверждение (б), получим

$$T^m(J) \leq T^m(J') + \rho \|J - J'\|.$$

В силу симметрии

$$T^m(J') \leq T^m(J) + \rho \|J - J'\|.$$

Объединяя эти два неравенства, будем иметь

$$\|T^m(J) - T^m(J')\| \leq \rho \|J - J'\|. \square$$

Теперь нам понадобится следующая теорема о неподвижной точке. (См. [64, с. 383] — доказательство, предложенное там, может быть обобщено на банаховы пространства^{*)}.)

Теорема о неподвижной точке. Если $\bar{B}$ — замкнутое подмножество банахова пространства с нормой, обозначенной $\|\cdot\|$, и отображение $L: \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ таково, что для некоторых положительного целого числа m и скаляра $\rho \in (0, 1)$ имеем $\|L^m(z) - L^m(z')\| \leq \rho \|z - z'\|$ при любых $z, z' \in \bar{B}$, то L имеет единственную неподвижную точку в $\bar{B}$, т.е. существует единственный вектор $z^* \in \bar{B}$ такой, что $L(z^*) = z^*$. Более того, для любого вектора $z \in \bar{B}$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|L^N(z) - z^*\| = 0.$$

Следующее предложение дает характеристику оптимальной функции издержек J^* и функции издержек J_μ при произвольной стационарной стратегии $(\mu, \mu, \dots) \in \Pi$. Оно также показывает, что эти функции могут быть получены как пределы последовательных применений операторов T и T_μ к произвольной функции $J \in \bar{B}$.

Предложение 4.2. Пусть выполнено предположение С. Тогда:

(а) Оптимальная функция издержек J^* принадлежит множеству $\bar{B}$ и является единственной неподвижной точкой оператора T в $\bar{B}$, т.е. $J^* = T(J^*)$, и если $J' \in \bar{B}$ и $J' = T(J')$, то $J' = J^*$. Более того, если функция $J' \in \bar{B}$ такова, что $T(J') \leq J'$, то $J^* \leq J'$, а если $J' \leq T(J')$, то $J' \leq J^*$.

(б) Для любого отображения $\mu \in M$ функция J_μ принадлежит множеству $\bar{B}$ и является единственной неподвижной точкой оператора T_μ в $\bar{B}$.

(в) Имеют место соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T^N(J) - J^*\| = 0 \quad \forall J \in \bar{B},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T_\mu^N(J) - J_\mu\| = 0, \quad \forall J \in \bar{B}, \quad \mu \in M.$$

Доказательство. Из предложения 4.1 (в) и теоремы о неподвижной точке следует, что операторы T и T_μ имеют единственные неподвижные точки в $\bar{B}$. Очевидно, что неподвижная точка оператора T_μ есть J_μ , и утверждение (б) доказано. Пусть $\tilde{J}^*$ — неподвижная точка оператора T . Мы имеем $\tilde{J}^* = T(\tilde{J}^*)$. Для произвольного числа $\bar{\epsilon} > 0$ выберем $\bar{\mu} \in M$ так, чтобы $T_{\bar{\mu}}(\tilde{J}^*) \leq \tilde{J}^* + \bar{\epsilon}$. Из неравенства (2) следует, что $T_{\bar{\mu}}^2(\tilde{J}^*) \leq T_{\bar{\mu}}(\tilde{J}^*) + \alpha \bar{\epsilon} \leq \tilde{J}^* + (1 + \alpha) \bar{\epsilon}$. Продолжая аналогичным образом, получим

$$T_{\bar{\mu}}^m(\tilde{J}^*) \leq \tilde{J}^* + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \bar{\epsilon}.$$

Используя неравенство (3), имеем

$$\begin{aligned} T_{\bar{\mu}}^{2m}(\tilde{J}^*) &\leq T_{\bar{\mu}}^m(\tilde{J}^*) + \rho(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \bar{\epsilon} \leq \\ &\leq \tilde{J}^* + (1 + \rho)(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

^{*)} Или см. Колмогоров А.Н. и Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. (Прим. ред.)

Аналогично, для всех $k \geq 1$ справедливо неравенство

$$T_{\mu}^{km}(\tilde{J}^*) \leq \tilde{J}^* + (1 + \rho + \dots + \rho^{k-1})(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})\bar{\epsilon}.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и используя тот факт, что $J_{\mu} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{\mu}^{km}(\tilde{J}^*)$, получим

$$J_{\mu} \leq \tilde{J}^* + \frac{1}{1 - \rho} (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \bar{\epsilon}. \quad (4)$$

Выбирая $\bar{\epsilon} = (1 - \rho)(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})^{-1}\epsilon$, найдем $J_{\mu} \leq \tilde{J}^* + \epsilon$. Так как $J^* \leq J_{\mu}$ и $\epsilon > 0$ произвольно, то $J^* \leq \tilde{J}^*$. Кроме того, справедливо неравенство

$$J^* = \inf_{\pi \in \Pi} \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(\tilde{J}^*) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} T^N(\tilde{J}^*) = J^*.$$

Следовательно, $J^* = \tilde{J}^*$ и J^* есть единственная неподвижная точка оператора T . Утверждение (в) непосредственно следует из теоремы о неподвижной точке. Наконец, утверждение (а) легко получается из утверждения (в) и монотонности оператора T . $\square$

Следующее предложение касается существования и характеристики стационарных оптимальных стратегий.

Предложение 4.3. Пусть выполнено предположение С. Тогда:

(а) Стационарная стратегия $\pi^* = (\mu^*, \mu^*, \dots) \in \Pi$ оптимальна тогда и только тогда, когда $T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*)$, а также тогда и только тогда, когда $T_{\mu^*}(J_{\mu^*}) = T(J_{\mu^*})$.

(б) Если для любого состояния $x \in S$ существует стратегия, которая оптимальна при этом x , то существует стационарная оптимальная стратегия.

(в) Для любого $\epsilon > 0$ существует стационарная ϵ -оптимальная стратегия, т.е. стратегия $\pi_{\epsilon} = (\mu_{\epsilon}, \mu_{\epsilon}, \dots) \in \Pi$ такая, что

$$\|J^* - J_{\mu_{\epsilon}}\| \leq \epsilon.$$

Доказательство.

(а) Если стратегия π^* оптимальна, то $J_{\mu^*} = J^*$ и результат следует из предложения 4.2 (а) и (б). Если $T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*)$, то $T_{\mu^*}(J^*) = J^*$ и, следовательно, $J_{\mu^*} = J^*$ в силу предложения 4.2 (б). Если $T_{\mu^*}(J_{\mu^*}) = T(J_{\mu^*})$, то $J_{\mu^*} = T(J_{\mu^*})$ и $J_{\mu^*} = J^*$ в силу предложения 4.2 (а).

(б) Пусть $\pi_x^* = (\mu_{0,x}^*, \mu_{1,x}^*, \dots)$ — стратегия, оптимальная при $x \in S$. Тогда, используя утверждение (а) предложения 4.1 и утверждение (а) предложения 4.2, имеем

$$\begin{aligned} J^*(x) &= J_{\pi_x^*}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_{0,x}^*} \dots T_{\mu_{k,x}^*})(J_0)(x) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_{0,x}^*} \dots T_{\mu_{k,x}^*})(J^*)(x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_{0,x}^*} T^k)(J^*)(x) = \\ &= T_{\mu_{0,x}^*}(J^*)(x) \geq T(J^*)(x) = J^*(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $T_{\mu_{0,x}^*}(J^*)(x) = T(J^*)(x)$ для любого x . Определим $\mu^* \in M$, полагая $\mu^*(x) = \mu_{0,x}^*(x)$. Тогда $T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*)$ и стационарная стратегия $(\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна в силу утверждения (а).

(в) Это было доказано ранее при доказательстве утверждения (а) предложения 4.2 [ср. (4)]. $\square$

Утверждение (а) предложения 4.3 показывает, что стационарная оптимальная стратегия существует тогда и только тогда, когда инфимум в уравнении оптимальности достигается для любого состояния $x \in S$

$$J^*(x) = T(J^*)(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J^*).$$

Таким образом, если множество $U(x)$ конечно для любого $x \in S$, то существует стационарная оптимальная стратегия. Следующее предложение усиливает этот результат и также показывает, что стационарные оптимальные стратегии могут быть получены в пределе из оптимальных стратегий при конечном горизонте посредством алгоритма ДП, который для произвольной функции $J \in \bar{B}$ последовательно вычисляет $T(J), T^2(J), \dots$

Предложение 4.4. Пусть выполнено предположение С, и предположим, что пространство управлений S есть хаусдорфово пространство. Предположим далее, что для некоторой функции $J \in \bar{B}$ и положительного целого числа $\bar{k}$ множества

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in U(x) \mid H[x, u, T^k(J)] \leq \lambda\} \quad (5)$$

компактны для всех $x \in S, \lambda \in R$ и $k \geq \bar{k}$. Тогда:

(а) существует стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots) \in \Pi$, доставляющая инфимум в алгоритме ДП с начальной функцией J для всех $x \in S$ и $k \geq \bar{k}$, т.е. такая, что

$$(T_{\mu_k^*} T^k)(J) = T^{k+1}(J) \quad \forall k \geq \bar{k}; \quad (6)$$

(б) существует стационарная оптимальная стратегия;

(в) для любой стратегии π^* , удовлетворяющей равенству (6), последовательность $\{\mu_k^*(x)\}$ имеет по крайней мере одну предельную точку при любом $x \in S$;

(г) если функция $\mu^*: S \rightarrow C$ такова, что $\mu^*(x)$ является предельной точкой последовательности $\{\mu_k^*(x)\}$ при любом $x \in S$, то стационарная стратегия $(\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна.

Доказательство.

(а) Так как имеет место равенство

$$T^{k+1}(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} H[x, u, T^k(J)],$$

то результат следует из компактности множеств (5) и леммы 3.1.

(б) Это утверждение будет непосредственно следовать из (в) и (г).

(в) Пусть стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots)$ удовлетворяет равенству (6). Положим

$$\epsilon_k = \sup \{ \|T^i(J) - J^* \mid i \geq k \}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из соотношений (2), (6) и из того факта, что $T(J^*) = J^*$, вытекает

$$\| (T_{\mu_n^*} T^n)(J) - J^* \| = \| T^{n+1}(J) - T(J^*) \| \leq \alpha \| T^n(J) - J^* \| \quad \forall n \geq \bar{k},$$

$$\| (T_{\mu_n^*} T^n)(J) - (T_{\mu_n^*} T^k)(J) \| \leq \alpha \| T^n(J) - T^k(J) \| \leq$$

$$\leq \alpha \| T^n(J) - J^* \| + \alpha \| T^k(J) - J^* \| \quad \forall n \geq \bar{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из этих двух соотношений получаем

$$H[x, \mu_n^*(x), T^k(J)] \leq H[x, \mu_n^*(x), T^n(J)] + 2\alpha\epsilon_k \leq$$

$$\leq J^*(x) + 3\alpha\epsilon_k \quad \forall n \geq k, \quad k \geq \bar{k}.$$

Следовательно, $\mu_n^*(x) \in U_k[x, J^*(x) + 3\alpha\epsilon_k]$ для всех $n \geq k$ и $k \geq \bar{k}$ и последовательность $\{\mu_n^*(x)\}$ имеет предельную точку в силу компактности множества $U_k[x, J^*(x) + 3\alpha\epsilon_k]$.

(г) Если $\mu^*(x)$ является предельной точкой последовательности $\{\mu_n^*(x)\}$, то $\mu^*(x) \in U_k[x, J^*(x) + 3\alpha\epsilon_k]$ для всех $k \geq \bar{k}$ или, что эквивалентно,
 $(T_{\mu^*} \circ T^k)(J)(x) \leq J^*(x) + 3\alpha\epsilon_k \quad \forall x \in S, \quad k \geq \bar{k}.$

Используя неравенство (2), получаем

$$\|(T_{\mu^*} \circ T^k)(J) - T_{\mu^*}(J^*)\| \leq \alpha \|T^k(J) - J^*\| \leq \alpha\epsilon_k$$

для всех k . Объединяя последние два неравенства, получим

$$T_{\mu^*}(J^*)(x) \leq J^*(x) + 4\alpha\epsilon_k \quad \forall x \in S, \quad k \geq \bar{k}.$$

Так как $\epsilon_k \rightarrow 0$ [ср. предложение 4.2 (в)], то $T_{\mu^*}(J^*) \leq J^*$. Используя тот факт, что $J^* = T(J^*) \leq T_{\mu^*}(J^*)$, получаем $T_{\mu^*}(J^*) = J^*$ и, как следует из предложения 4.3, стационарная стратегия $(\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна. $\square$

Примеры, в которых компактность множеств (5) может быть проверена, были приведены в конце раздела 3.2. Другим примером служит полунепрерывная снизу модель стохастического оптимального управления из раздела 8.3.

4.3. Вычислительные методы

Существует ряд вычислительных методов, которые могут быть использованы для нахождения оптимальной функции издержек J^* и оптимальных или почти оптимальных стационарных стратегий. Естественно, эти методы могут быть полезны для практики только в том случае, если они требуют конечного числа арифметических операций. Таким образом, хотя "теоретические" алгоритмы, требующие бесконечного числа арифметических операций, и представляют некоторый интерес, на практике мы должны модифицировать эти алгоритмы так, чтобы они стали приемлемыми с точки зрения вычислений.

В рассматриваемых ниже алгоритмах предполагается, что для любой функции $J \in \bar{B}$ и любого $\epsilon > 0$ существует приемлемый вычислительный метод, который определяет за конечное число арифметических операций функции $J_\epsilon \in \bar{B}$ и $\mu_\epsilon \in M$ такие, что

$$J_\epsilon \leq T(J) + \epsilon, \quad T_{\mu_\epsilon}(J) \leq T(J) + \epsilon.$$

Во многих интересных задачах пространство состояний S представляет собой компактное подмножество евклидова пространства, и вычислительные процедуры могут быть основаны на дискретизации пространства состояний или управлений (или их обоих) и кусочно-постоянной аппроксимации различных функций (см., например, [12], раздел 5.2). Основываясь на этом предположении (предель применения которого мы вполне осознаем), мы для каждого рассматриваемого "теоретического" алгоритма предложим его приемлемый с точки зрения вычислений вариант.

4.3.1. Последовательные приближения

Метод последовательных приближений состоит в выборе начальной функции $J \in \bar{B}$ и последовательном вычислении функций $T(J), T^2(J), \dots, T^k(J), \dots$. Согласно предложению 4.2 (в) имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k(J) - J^*\| = 0$ и, следовательно, в пределе получим функцию оптимальных издержек

J^* . Вслед за тем стационарная оптимальная стратегия (если она существует) может быть получена из условия, чтобы при каждом $x \in S$ в уравнении оптимальности

$$J^*(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J^*)$$

достигался минимум. Если точный минимум не достигается или если имеется только приближенное значение функции J^* , то все равно, как показывает следующее предложение, можно получить почти оптимальную стационарную стратегию.

Предложение 4.5. Пусть выполнено предположение С и элементы $J^* \in \bar{B}$ и $\mu \in M$ таковы, что

$$\|\tilde{J}^* - J^*\| \leq \epsilon_1, \quad T_\mu(\tilde{J}^*) \leq T(\tilde{J}^*) + \epsilon_2$$

где скаляры $\epsilon_1 \geq 0$, $\epsilon_2 \geq 0$. Тогда

$$J^* \leq J_\mu \leq J^* + \{ (2\alpha\epsilon_1 + \epsilon_2)(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) / (1 - \rho) \}.$$

Доказательство. Используя неравенство (2), получаем

$$T_\mu(J^*) - \alpha\epsilon_1 \leq T_\mu(\tilde{J}^*) \leq T(\tilde{J}^*) + \epsilon_2 \leq T(J^*) + (\alpha\epsilon_1 + \epsilon_2),$$

и отсюда следует, что

$$T_\mu(J^*) \leq J^* + (2\alpha\epsilon_1 + \epsilon_2).$$

Используя это неравенство и рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены при доказательстве неравенства (4) в предложении 4.2, получим требуемый результат. $\square$

Представляет интерес следствие, вытекающее из этого предложения.

Следствие 4.5.1. Пусть выполнено предположение С, и пусть S и $U(x)$ при каждом $x \in S$ — конечные множества. Тогда метод последовательных приближений приводит к оптимальной стационарной стратегии за конечное число итераций, в том смысле, что если для произвольной функции $J \in \bar{B}$ стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots) \in \Pi$ построена из условий

$$(T_{\mu_k} T^k)(J) = T^{k+1}(J), \quad k = 0, 1, \dots,$$

то найдется целое число $\bar{k}$ такое, что стационарная стратегия $(\mu_k^*, \mu_k^*, \dots)$ будет оптимальна при любых $k \geq \bar{k}$.

Доказательство. Вследствие наших предположений множество M является конечным. Следовательно, существует скаляр $\epsilon^* > 0$ такой, что из неравенства $J_\mu \leq J^* + \epsilon^*$ следует оптимальность стратегии $(\mu, \mu, \dots)$.

Возьмем k настолько большим, чтобы неравенство $\|T^k(J) - J^*\| \leq \bar{\epsilon}$ выполнялось для всех $k \geq \bar{k}$, где $\bar{\epsilon}$ удовлетворяет неравенству

$$2\alpha\bar{\epsilon}(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})(1 - \rho)^{-1} \leq \epsilon^*.$$

Воспользовавшись предложением 4.5, получим требуемое утверждение. $\square$

Схема последовательных приближений может быть значительно улучшена, если использовать монотонные оценки погрешностей, содержащиеся в следующем предложении.

Предложение 4.6. Пусть выполнено предположение С, и пусть для любых числа $r \neq 0$, функции $J \in \bar{B}$ и состояния $x \in S$ имеет место неравенство

$$\alpha_1 \leq [T^m(J + r)(x) - T^m(J)(x)] / r \leq \alpha_2, \quad (7)$$

где постоянные α_1 и α_2 удовлетворяют условиям $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$. Тогда

да для любых $J \in \bar{B}$, $x \in S$ и $k = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} T^{km}(J)(x) + b_k &\leq T^{(k+1)m}(J)(x) + b_{k+1} \leq J^*(x) \leq \\ &\leq T^{(k+1)m}(J)(x) + \bar{b}_{k+1} \leq T^{km}(J)(x) + \bar{b}_k, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$b_k = \min \left[\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} d_k, \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} d_k \right], \quad \bar{b}_k = \max \left[\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \bar{d}_k, \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \bar{d}_k \right],$$

$$d_k = \inf_{x \in S} [T^{km}(J)(x) - T^{(k-1)m}(J)(x)],$$

$$\bar{d}_k = \sup_{x \in S} [T^{km}(J)(x) - T^{(k-1)m}(J)(x)].$$

З а м е ч а н и е. Если $B = \bar{B}$, то можно всегда положить $\alpha_2 = \rho$, $\alpha_1 = 0$, но оценки можно упростить, если удастся выбрать $0 < \alpha_1$, и/или $\alpha_2 < \rho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать неравенство (8) для $k = 1$, так как результат для $k > 1$ получается затем заменой функции J на $T^{(k-1)m}(J)$. Для упрощения записи положим $m = 1$ (чтобы доказать требуемый результат для общего случая, достаточно затем просто заменить T на T^m). Обозначим $d_1 = d$, $\bar{d}_1 = \bar{d}$, $d_2 = d'$, $\bar{d}_2 = \bar{d}'$. Соотношение (7) можно переписать (при $m = 1$) в виде

$$T(J) + \min[\alpha_1 r, \alpha_2 r] \leq T(J + r) \leq T(J) + \max[\alpha_1 r, \alpha_2 r]. \quad (9)$$

Для любого $x \in S$ имеем

$$J(x) + d \leq T(J)(x). \quad (10)$$

Применяя оператор T к обеим частям неравенства (10) и используя неравенства (9) и (10), получим

$$\begin{aligned} J(x) + \min[d + \alpha_1 d, d + \alpha_2 d] &\leq T(J)(x) + \min[\alpha_1 d, \alpha_2 d] \leq \\ &\leq T(J + d)(x) \leq T^2(J)(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Добавляя $\min[\alpha_1^2 d, \alpha_2^2 d]$ к обеим частям этого неравенства и используя неравенство (9) (с заменой J на $T(J)$ и $r = \min[\alpha_1 d, \alpha_2 d]$), а затем снова неравенство (11), получим

$$J(x) + \min[d + \alpha_1 d + \alpha_1^2 d, d + \alpha_2 d + \alpha_2^2 d] \leq$$

$$\leq T(J)(x) + \min[\alpha_1 d + \alpha_1^2 d, \alpha_2 d + \alpha_2^2 d] \leq$$

$$\leq T^2(J)(x) + \min[\alpha_1^2 d, \alpha_2^2 d] \leq$$

$$\leq T[T(J) + \min[\alpha_1 d, \alpha_2 d]](x) \leq T^3(J)(x).$$

Продолжая аналогичным образом, получим

$$J(x) + \min \left[\sum_{i=0}^k \alpha_1^i d, \sum_{i=0}^k \alpha_2^i d \right] \leq T(J)(x) +$$

$$+ \min \left[\sum_{i=1}^k \alpha_1^i d, \sum_{i=1}^k \alpha_2^i d \right] \leq \dots \leq T^k(J)(x) +$$

$$+ \min[\alpha_1^k d, \alpha_2^k d] \leq T^{k+1}(J)(x)$$

для любого $k = 1, 2, \dots$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} J(x) + \min \left[\frac{1}{1-\alpha_1} d, \frac{1}{1-\alpha_2} d \right] &\leq T(J)(x) + \min \left[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} d, \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} d \right] \leq \\ &\leq T^2(J)(x) + \min \left[\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1} d, \frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2} d \right] \leq J^*(x). \end{aligned} \quad (12)$$

С другой стороны, из неравенства (11) следует, что

$$\min[\alpha_1 d, \alpha_2 d] \leq T^2(J)(x) - T(J)(x),$$

и, беря инфимум по $x \in S$, убеждаемся, что $\min[\alpha_1 d, \alpha_2 d] \leq d'$. Легко видеть, что это соотношение приводит к неравенству

$$\min \left[\frac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1} d, \frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2} d \right] \leq \min \left[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} d', \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} d' \right]. \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) и определения чисел b_1 и b_2 , следует, что $T(J)(x) + b_1 \leq T^2(J)(x) + b_2$.

Кроме того, из неравенства (12) следует, что $T(J)(x) + b_1 \leq J^*(x)$, и точно так же показывается, что $T^2(J)(x) + b_2 \leq J^*(x)$. Итак, левая часть неравенства (8) доказана для $k = 1$ и $m = 1$. Аналогичным образом доказывается правая часть неравенства. $\square$

Заметим, что числа b_k и $\bar{b}_k$ в неравенстве (8) легко находятся в процессе вычислений. Вычислительные примеры и исследования оценок погрешностей из предложения 4.6 можно найти в разделе 6.2 из [12].

Используя оценки погрешностей из предложения 4.6, можно получить значение функции J^* с любой наперед заданной точностью методом последовательных приближений за конечное число итераций. Однако этого еще недостаточно для практической реализации алгоритма, так как предложение 4.6 требует знания точных значений функций $T^k(J)$. Следующее предложение позволяет получить с достаточной для вычислений точностью приближенные значения этих функций и дает оценки погрешностей, похожие на оценки из предложения 4.6.

Предложение 4.7. Пусть выполнено предположение С. Для любой функции $J \in \bar{B}$ и произвольного $\epsilon > 0$ рассмотрим последовательность $\{J_k\} \subset \bar{B}$, удовлетворяющую неравенствам

$$T(J) \leq J_1 \leq T(J) + \epsilon,$$

$$T(J_k) \leq J_{k+1} \leq T(J_k) + \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\|T^{km}(J) - J_{km}\| \leq \bar{\epsilon}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

где

$$\bar{\epsilon} = \epsilon(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})/(1 - \rho).$$

Более того, если выполнены условия предложения 4.6, то для всех $x \in S$ и $k = 1, 2, \dots$

$$J_{km}(x) + \beta_k \leq J^*(x) \leq J_{km}(x) + \bar{\beta}_k,$$

где

$$\beta_k = \min \left[\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \delta_k, \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \delta_k \right] - \bar{\epsilon},$$

$$\bar{\beta}_k = \max \left[\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} \bar{\delta}_k, \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \bar{\delta}_k \right] + \bar{\epsilon},$$

$$\delta_k = \inf_{x \in S} [J_{km}(x) - J_{(k-1)m}(x)] - 2\bar{\epsilon},$$

$$\bar{\delta}_k = \sup_{x \in S} [J_{km}(x) - J_{(k-1)m}(x)] + 2\bar{\epsilon}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} J_m &\leq T(J_{m-1}) + \epsilon \leq T[T(J_{m-2}) + \epsilon] + \epsilon \leq \\ &\leq T^2(J_{m-2}) + (1 + \alpha)\epsilon \leq T^2[T(J_{m-3}) + \epsilon] + (1 + \alpha)\epsilon \leq \\ &\leq T^3(J_{m-3}) + (1 + \alpha + \alpha^2)\epsilon \leq \dots \leq T^{m-1}(J_1) + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-2})\epsilon \leq \\ &\leq T^m(J) + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})\epsilon. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения приводят к неравенству

$$J_{2m} \leq T^m(J_m) + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})\epsilon,$$

откуда следует, что

$$\|T^m(J_m) - T^{2m}(J)\| \leq \rho \|J_m - T^m(J)\|.$$

Используя предыдущие три неравенства, получим

$$\begin{aligned} \|J_{2m} - T^{2m}(J)\| &\leq \|J_{2m} - T^m(J_m)\| + \\ &+ \|T^m(J_m) - T^{2m}(J)\| \leq (1 + \rho)\epsilon(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}). \end{aligned}$$

Продолжая подобным образом, получим, что

$$\|J_{km} - T^{km}(J)\| \leq (1 + \rho + \dots + \rho^{k-1})\epsilon(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})$$

для $k = 1, 2, \dots$, откуда следует неравенство (14). Остальные утверждения следуют из неравенства (14) и оценок погрешностей из предложения 4.6. $\square$

Предложение 4.7 служит основой для практически осуществимого алгоритма, позволяющего находить J^* с произвольной степенью точности, а почти оптимальную стационарную стратегию можно найти, используя результаты предложения 4.5.

4.3.2. Итерация стратегий

Теоретически алгоритм итерации стратегий состоит в следующем. Выбирается начальная функция $\mu_0 \in M$, вычисляется соответствующая функция издержек J_{μ_0} и новая функция $\mu_1 \in M$ находится из условия $T_{\mu_0}(J_{\mu_0}) = T(J_{\mu_0})$. В более общей форме, если функция $\mu_k \in M$ уже построена, то вычисляется функция J_{μ_k} и находится функция $\mu_{k+1} \in M$, удовлетворяющая равенству $T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_{k+1}}) = T(J_{\mu_k})$, после чего процесс

повторяется. Если S — конечное множество и $U(x)$ также конечно при любом $x \in S$, то обычно можно вычислить функцию J_{μ_k} за конечное число арифметических операций, и алгоритм практически реализуем.

Следующее предложение показывает, что при таких условиях оптимальная стационарная стратегия определяется за конечное число итераций.

Предложение 4.8. Пусть выполнено предположение С, и пусть S и $U(x)$ при любом $x \in S$ — конечные множества. Тогда для любой начальной функции $\mu_0 \in M$ алгоритм итерации стратегий приводит к оптимальной стационарной стратегии за конечное число итераций, т.е. если $\{\mu_k\}$ — полученная в процессе выполнения алгоритма последовательность, то существует целое число $\bar{k}$, такое, что стратегия $(\mu_k, \mu_k, \dots)$ оптимальна при всех $k \geq \bar{k}$.

Доказательство. Имеем

$$T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) = T(J_{\mu_k}) \leq T_{\mu_k}(J_{\mu_k}) = J_{\mu_k}$$

при всех k . Применяя оператор $T_{\mu_{k+1}}$ повторно к обеим частям, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} T_{\mu_{k+1}}^N(J_{\mu_k}) &\leq T_{\mu_{k+1}}^{N-1}(J_{\mu_k}) \leq \dots \leq T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) = \\ &= T(J_{\mu_k}) \leq J_{\mu_k}, \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

В силу предложения 4.2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_{\mu_{k+1}}^N(J_{\mu_k}) = J_{\mu_{k+1}}, \quad (16)$$

поэтому $J_{\mu_{k+1}} \leq J_{\mu_k}$.

Если $(\mu_k, \mu_k, \dots)$ — оптимальная стратегия, то $J_{\mu_{k+1}} = J_{\mu_k} = J^*$ и стратегия $(\mu_{k+1}, \mu_{k+1}, \dots)$ также оптимальна. В противном случае должно иметь место неравенство $J_{\mu_{k+1}}(x) < J_{\mu_k}(x)$ для некоторого $x \in S$ ибо если $J_{\mu_{k+1}} = J_{\mu_k}$, то из соотношений (15) и (16) следует, что $T(J_{\mu_k}) = J_{\mu_k}$ и стратегия $(\mu_k, \mu_k, \dots)$ оптимальна. Следовательно, либо стратегия $(\mu_k, \mu_k, \dots)$ оптимальна, либо стратегия $(\mu_{k+1}, \mu_{k+1}, \dots)$ строго лучше. Так как множество M по предположению конечно, то предложение доказано. $\square$

Если множества S и $U(x)$ бесконечны, то по ряду причин алгоритм итерации стратегий должен быть изменен. Во-первых, для данной функции μ_k может не существовать функции μ_{k+1} такой, что $T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) = T(J_{\mu_k})$. Во-вторых, даже если такая функция μ_{k+1} существует, то может оказаться невозможным реальное вычисление $T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k})$ и $J_{\mu_{k+1}}$. Поэтому рассмотрим модифицированный алгоритм итерации стратегий:

Шаг 1. Выбрать функцию $\mu_0 \in M$ и положительные константы γ, δ и ϵ .

Шаг 2. Для данной функции $\mu_k \in M$ найти функцию $J_{\mu_k} \in B$ такую, что $\|J_{\mu_k} - J_{\mu_k}\| \leq \gamma \rho^k$.

Шаг 3. Найти функцию $\mu_{k+1} \in M$ такую, что $\|T_{\mu_{k+1}}(\tilde{J}_{\mu_k}) - T(\tilde{J}_{\mu_k})\| \leq \delta \rho^k$. Если

$$\|T_{\mu_{k+1}}(\tilde{J}_{\mu_k}) - \tilde{J}_{\mu_k}\| \leq \epsilon,$$

то — остановка. В противном случае заменить μ_k на μ_{k+1} и вернуться к шагу 2.

Заметим, что шаги 2 и 3 алгоритма вычислительно реализуемы.

Следующее предложение устанавливает правильность алгоритма.

Предложение 4.9. Пусть выполнено предположение С. Тогда модифицированный алгоритм итерации стратегии заканчивается за конечное число.

скажем за $\bar{k}$, итераций, и финальная функция $\mu_{\bar{k}}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\mu_{\bar{k}} - J^*\| \leq \gamma \rho^{\bar{k}} + \frac{(\epsilon + \delta \rho^{\bar{k}})(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})}{1 - \rho}. \quad (17)$$

Доказательство. Сначала покажем, что если алгоритм оканчивается на k -й итерации, то выполняется неравенство (17). Действительно, имеем

$$\|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - J^*\| \leq \gamma \rho^{\bar{k}}, \quad (18)$$

$$\|T_{\mu_{\bar{k}+1}}(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - T(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| \leq \delta \rho^{\bar{k}}, \quad (19)$$

$$\|T_{\mu_{\bar{k}+1}}(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - J^*\| \leq \epsilon. \quad (20)$$

Для любого положительного целого n имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - J^*\| &\leq \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T^m(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| + \|T^m(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - T^{2m}(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| + \\ &+ \dots + \|T^{(n-1)m}(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - T^{nm}(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| + \|T^{nm}(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - J^*\|. \end{aligned}$$

Из этого соотношения получим, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - J^*\| &\leq (1 + \rho + \dots + \rho^{n-1}) \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T^m(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| + \\ &+ \|T^{nm}(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - J^*\| \end{aligned} \quad (21)$$

для всех $n \geq 1$. Имеем также

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T^m(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| &\leq \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| + \|T(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - T^2(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| + \dots \\ &+ \dots + \|T^{m-1}(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - T^m(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\|, \end{aligned}$$

откуда, используя неравенство (2), получим

$$\|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T^m(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| \leq (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\|. \quad (22)$$

Комбинируя неравенства (21) и (22), получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - J^*\| &\leq (1 + \rho + \dots + \rho^{n-1}) (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \times \\ &\times \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| + \|T^{nm}(\tilde{\mu}_{\bar{k}}) - J^*\| \end{aligned}$$

при всех $n \geq 1$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - J^*\| \leq (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1}) \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| / (1 - \rho). \quad (23)$$

Используя неравенство (18), находим также

$$\|\mu_{\bar{k}} - J^*\| \leq \|\mu_{\bar{k}} - \tilde{\mu}_{\bar{k}}\| + \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - J^*\| \leq \gamma \rho^{\bar{k}} + \|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - J^*\|. \quad (24)$$

Из неравенств (19) и (20) получим

$$\|\tilde{\mu}_{\bar{k}} - T(\tilde{\mu}_{\bar{k}})\| \leq \epsilon + \delta \rho^{\bar{k}}. \quad (25)$$

Комбинируя неравенства (23) – (25), получаем (17).

Чтобы показать, что алгоритм будет заканчиваться за конечное число итераций, предположим противное, т.е. допустим, что $\|T_{\mu_{k+1}}(\tilde{\mu}_k) - \tilde{\mu}_k\| > \epsilon$ для всех k , и алгоритм порождает бесконечную последовательность

$\{\mu_k\} \subset M$. Имеем

$$\begin{aligned} & \|T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) - T(J_{\mu_k})\| \leq \|T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) - T_{\mu_{k+1}}(\tilde{J}_{\mu_k})\| + \\ & + \|T_{\mu_{k+1}}(\tilde{J}_{\mu_k}) - T(\tilde{J}_{\mu_k})\| + \|T(\tilde{J}_{\mu_k}) - T(J_{\mu_k})\| \leq (\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \end{aligned}$$

при любом k . Из этого соотношения получим

$$\begin{aligned} T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) & \leq T(J_{\mu_k}) + (\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \leq T_{\mu_k}(J_{\mu_k}) + (\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k = \\ & = J_{\mu_k} + (\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \end{aligned} \quad (26)$$

при любом k . Применяя оператор $T_{\mu_{k+1}}$ к обеим частям неравенства (26) и вновь используя неравенство (26), находим

$$\begin{aligned} T_{\mu_{k+1}}^2(J_{\mu_k}) & \leq T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) + \alpha(\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \leq \\ & \leq T(J_{\mu_k}) + (1 + \alpha)(\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \leq J_{\mu_k} + (1 + \alpha)(\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k. \end{aligned}$$

Продолжая аналогичным образом, убедимся, что

$$\begin{aligned} T_{\mu_{k+1}}^m(J_{\mu_k}) & \leq T(J_{\mu_k}) + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})(\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \leq \\ & \leq J_{\mu_k} + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})(\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \end{aligned}$$

для всех k . Последовательно применяя оператор $T_{\mu_{k+1}}^m$ к обеим частям неравенства, получим

$$T_{\mu_{k+1}}^{nm}(J_{\mu_k}) \leq T(J_{\mu_k}) + (1 + \rho + \dots + \rho^{n-1})(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})(\delta + 2\alpha\gamma)\rho^k \quad (27)$$

для всех n и k . Обозначим

$$\lambda = (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-1})(\delta + 2\alpha\gamma)/(1 - \rho).$$

Затем, переходя в (27) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$J_{\mu_{k+1}} \leq T(J_{\mu_k}) + \lambda\rho^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Последовательно применяя оператор T к обеим частям, найдем

$$J_{\mu_{nm}} \leq T^m(J_{\mu_{(n-1)m}}) + \lambda(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\rho + \dots + \rho^{m-1})\rho^{(n-1)m}. \quad (28)$$

Пусть $\bar{\lambda} = \lambda(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2}\rho + \dots + \rho^{m-1})$. Тогда неравенство (28) можно записать в виде

$$J_{\mu_{nm}} \leq T^m(J_{\mu_{(n-1)m}}) + \bar{\lambda}\rho^{(n-1)m}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Последовательно используя неравенство (29), для всех n получим

$$\begin{aligned} J_{\mu_{nm}} & \leq T^m(J_{\mu_{(n-1)m}}) + \bar{\lambda}\rho^{(n-1)m} \leq \\ & \leq T^m[T^m(J_{\mu_{(n-2)m}}) + \bar{\lambda}\rho^{(n-2)m}] + \bar{\lambda}\rho^{(n-1)m} \leq \\ & \leq T^{2m}(J_{\mu_{(n-2)m}}) + \bar{\lambda}[\rho^{(n-1)m} + \rho\rho^{(n-2)m}] \leq \dots \\ & \dots \leq T^{nm}(J_{\mu_0}) + \bar{\lambda}[\rho^{(n-1)m} + \rho\rho^{(n-2)m} + \rho^2\rho^{(n-3)m} + \dots + \rho^{n-1}]. \end{aligned}$$

Так как $\rho^k\rho^{(n-k-1)m} \leq \rho^{n-1}$ при всех $k = 0, 1, \dots, n-1$, то это неравенство приводит к следующему:

$$J^* \leq J_{\mu_{nm}} \leq T^{nm}(J_{\mu_0}) + n\rho^{n-1}\bar{\lambda}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (np^{n-1}) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{nm}(J_{\mu_0}) - J^*\| = 0$, то правая часть неравенства стремится к J^* при $n \rightarrow \infty$, и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{\mu_{nm}} - J^*\| = 0$. Так как по построению

$$\begin{aligned} & \|T_{\mu_{nm+1}}(\tilde{J}_{\mu_{nm}}) - \tilde{J}_{\mu_{nm}}\| \leq \|T_{\mu_{nm+1}}(\tilde{J}_{\mu_{nm}}) - T(\tilde{J}_{\mu_{nm}})\| + \\ & + \|T(\tilde{J}_{\mu_{nm}}) - T(J_{\mu_{nm}})\| + \|T(J_{\mu_{nm}}) - T(J^*)\| + \\ & + \|J^* - J_{\mu_{nm}}\| + \|J_{\mu_{nm}} - \tilde{J}_{\mu_{nm}}\| \leq \\ & \leq (\delta + \alpha\gamma + \gamma)\rho^{nm} + (1 + \alpha)\|J_{\mu_{nm}} - J^*\|, \end{aligned}$$

то можно заключить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\mu_{nm+1}}(\tilde{J}_{\mu_{nm}}) - \tilde{J}_{\mu_{nm}}\| = 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $\|T_{\mu_{k+1}}(\tilde{J}_{\mu_k}) - \tilde{J}_{\mu_k}\| > \epsilon$ для любого k . $\square$

4.3.3. Математическое программирование

Пусть пространство состояний $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ является конечным множеством, и примем $\bar{B} = B$. Из предложения 4.2 (а) следует, что если только $J \in B$ и $J \leq T(J)$, то $J \leq J^*$. Следовательно, числа $J^*(x_1), \dots, J^*(x_n)$ являются решением следующей задачи математического программирования:

$$\text{минимизировать } \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

при условиях $\lambda_i \leq H(x_i, u, J_\lambda)$, $i = 1, \dots, n$, $u \in U(x_i)$,

где J_λ — это функция со значениями $J_\lambda(x_i) = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Если множество $U(x_i)$ конечно при всех i , то эта задача является конечномерной (возможно нелинейной) задачей математического программирования с конечным числом ограничений типа неравенств. Читатель легко проверит, что для задачи стохастического оптимального управления из раздела 2.3.2 эта задача на самом деле представляет собой задачу линейного программирования (см. также [12], раздел 6.2). Эта линейная задача может быть решена за конечное число арифметических операций.

4.4. Применение к частным случаям

Результаты предыдущих разделов полностью применимы к задачам из разделов 2.3.3 и 2.3.5, если только $\alpha < 1$ и функция g неотрицательна и ограничена. Мы сейчас покажем, что при этих условиях предположение С выполняется.

Стохастическое оптимальное управление — формулировка с внешним интегралом

Предложение 4.10. Рассмотрим отображение

$$H(x, u, J) = E^* \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] \mid x, u\} \quad (30)$$

из раздела 2.3.3 и положим $J_0(x) = 0$ для каждого $x \in S$. Предположим, что

$\alpha < 1$ и что при некотором $b \in R$

$$0 \leq g(x, u, w) \leq b \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W.$$

Тогда предположение С выполняется для множества $\bar{B}$, состоящего из всех неотрицательных функций $J \in B$, причем скаляры в неравенствах (2) и (3) равны соответственно 2α и α , а $m = 1$.

З а м е ч а н и е. Если рассматриваются специальные случаи отображений из пп. 2.3.1 и 2.3.2, то множество $\bar{B}$ может быть выбрано равным B , а скаляры в неравенствах (2) и (3) оба могут быть положены равными α .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $J_0 \in \bar{B}$ и $T(J)$, $T_\mu(J) \in \bar{B}$ для всех функций $J \in \bar{B}$ и $\mu \in M$. Кроме того, также для любой стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ имеем

$$J_0 \leq T_{\mu_0}(J_0) \leq \dots \leq (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_k})(J_0) \leq (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_k} T_{\mu_{k+1}})(J_0),$$

и, следовательно, $\lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x)$ существует при каждом $x \in S$. Легко также проверить по индукции, используя лемму А.2, что

$$(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k b \leq b/(1-\alpha) \quad \forall x \in S, \quad N = 1, 2, \dots$$

Следовательно, $\lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x)$ конечен для любого x .

При любых $x \in S$, $J, J' \in B$, $\mu \in M$ и $w \in W$ имеем

$$g[x, \mu(x), w] + \alpha J[f(x, \mu(x), w)] \leq g[x, \mu(x), w] + \alpha J'[f(x, \mu(x), w)] + \alpha \|J - J'\|. \quad (31)$$

Следовательно, согласно лемме А.3 (б),

$$\begin{aligned} E^* \{ g[x, \mu(x), w] + \alpha J[f(x, \mu(x), w)] \mid x, u \} &\leq \\ &\leq E^* \{ g[x, \mu(x), w] + \alpha J'[f(x, \mu(x), w)] \mid x, u \} + 2\alpha \|J - J'\|, \end{aligned} \quad (32)$$

$$T_\mu(J)(x) - T_\mu(J')(x) \leq 2\alpha \|J - J'\|.$$

В силу симметрии $T_\mu(J')(x) - T_\mu(J)(x) \leq 2\alpha \|J - J'\|$ и, следовательно,

$$|T_\mu(J)(x) - T_\mu(J')(x)| \leq 2\alpha \|J - J'\| \quad \forall x \in S, \quad \mu \in M.$$

Взяв супремум левой части по $x \in S$, получим

$$\|T_\mu(J) - T_\mu(J')\| \leq 2\alpha \|J - J'\| \quad \forall \mu \in M; \quad J, J' \in B, \quad (33)$$

а это показывает, что неравенство (2) выполнено.

Если даны две функции $J, J' \in \bar{B}$, то из неравенства (31) и лемм А.2 и А.3 (а) вместо (32) получим неравенство

$$\begin{aligned} E^* \{ g[x, \mu(x), w] + \alpha J[f(x, \mu(x), w)] \mid x, u \} &\leq \\ &\leq E^* \{ g[x, \mu(x), w] + \alpha J'[f(x, \mu(x), w)] \mid x, u \} + \alpha \|J - J'\|, \end{aligned}$$

и, как выше, получаем вместо (33) неравенство

$$\|T_\mu(J) - T_\mu(J')\| \leq \alpha \|J - J'\| \quad \forall \mu \in M; \quad J, J' \in \bar{B}.$$

Это показывает, что неравенство (3) выполнено при $\rho = \alpha$. $\square$

Предложение 4.11. Рассмотрим отображение

$$H(x, u, J) = \sup_{w \in W(x, u)} \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)]\} \quad (34)$$

из п. 2.3.5 и положим $J_0(x) = 0$ для всех $x \in S$. Предположим, что $\alpha < 1$ и для некоторого числа $b \in R$ имеем

$$0 \leq g(x, u, w) \leq b \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W.$$

Тогда предположение С выполняется для множества $\bar{B}$, равного B , $m = 1$, и обоих скаляров в неравенствах (2) и (3), равных α .

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 4.10. $\square$

Другие задачи, где применима теория, развитая в данной главе, можно найти в [12]. Пример интересной задачи, в которой предположение С выполняется при $m > 1$, описан в разделе 7.4 из [12].

Глава 5

МОДЕЛИ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ МОНОТОННОСТИ

5.1. Общие замечания и предположения

Рассмотрим задачу с бесконечным горизонтом:

$$\text{минимизировать } J_\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \quad (1)$$

при условии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$.

В этой главе вводятся предположения о монотонности функции J_0 , гарантирующие существование J_π для всех $\pi \in \Pi$. В любом из результатов этой главы будем считать выполненным одно из следующих двух предположений.

Предположение I (предположение о равномерном возрастании) :

$$J_0(x) \leq H(x, u, J_0) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x). \quad (2)$$

Предположение D (предположение о равномерном убывании) :

$$J_0(x) \geq H(x, u, J_0) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x). \quad (3)$$

Легко видеть, что при любом из этих предположений предел в задаче (1) вполне определен и конечен либо равен $\pm \infty$. Действительно, в случае предположения I из (2) следует, что

$$J_0 \leq T_{\mu_0}(J_0) \leq (T_{\mu_0} T_{\mu_1})(J_0) \leq \cdots \leq (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J_0) \leq \cdots,$$

тогда, как в случае предположения D, из (3) следует

$$J_0 \geq T_{\mu_0}(J_0) \geq (T_{\mu_0} T_{\mu_1})(J_0) \geq \cdots \geq (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J_0) \geq \cdots$$

В обоих случаях предел в задаче (1) существует на расширенной числовой оси для любого $x \in S$.

При изучении моделей с бесконечным горизонтом в предположениях I и D нам иногда придется дополнительно предполагать, что отображение H удовлетворяет одному из следующих допущений о непрерывности. (Пред-

положения 1.1 и 1.2 будут использоваться совместно с предположением 1, в то время как предположения D.1 и D.2 — совместно с предположением D.)

Предположение 1.1. Если последовательность $\{J_k\} \subset F$ удовлетворяет неравенствам $J_0 \leq J_k \leq J_{k+1}$ для любого k , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(x, u, J_k) = H(x, u, \lim_{k \rightarrow \infty} J_k) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x). \quad (4)$$

Предположение 1.2. Существует число $\alpha > 0$ такое, что для любого числа $r > 0$ и любой функции $J \in F$ с $J_0 \leq J$ выполняется неравенство

$$H(x, u, J) \leq H(x, u, J + r) \leq H(x, u, J) + \alpha r \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x). \quad (5)$$

Предположение D.1. Если последовательность $\{J_k\} \subset F$ удовлетворяет неравенствам $J_{k+1} \leq J_k \leq J_0$ для любого k , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(x, u, J_k) = H(x, u, \lim_{k \rightarrow \infty} J_k) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x). \quad (6)$$

Предположение D.2. Существует число $\alpha > 0$ такое, что для любого числа $r > 0$ и любой функции $J \in F$ с $J \leq J_0$ выполняется неравенство

$$H(x, u, J) - \alpha r \leq H(x, u, J - r) \leq H(x, u, J) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x). \quad (7)$$

5.2. Уравнение оптимальности

Сначала выясним, выполнено ли уравнение оптимальности $J^* = T(J^*)$. В качестве предварительного шага мы докажем следующий результат, представляющий также самостоятельный интерес.

Предложение 5.1. Пусть выполнены предположения 1.1 и 1.2. Тогда для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная стратегия, т.е. стратегия $\pi_\epsilon \in \Pi$ такая, что

$$J^* \leq J_{\pi_\epsilon} \leq J^* + \epsilon. \quad (8)$$

Более того, если число α в предположении 1.2 удовлетворяет условию $\alpha < 1$, то стратегию π_ϵ можно выбрать стационарной.

Доказательство. Пусть $\{\epsilon_k\}$ — такая последовательность, что все $\epsilon_k > 0$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \epsilon_k = \epsilon. \quad (9)$$

Для любого $x \in S$ рассмотрим последовательность стратегий $\{\pi_k[x]\} \subset \Pi$ вида

$$\pi_k[x] = (\mu_0^k[x], \mu_1^k[x], \dots)$$

такую, что

$$J_{\pi_k[x]}(x) \leq J^*(x) + \epsilon_k \quad \forall x \in S \quad (10)$$

для $k = 0, 1, \dots$ Такая последовательность существует, так как в силу сделанных предположений $J^*(x) > -\infty$.

Использованное здесь (и, быть может, вызывающее недоумение) обозначение нужно понимать следующим образом. Стратегия $\pi_k[x] = (\mu_0^k[x], \mu_1^k[x], \dots)$ связана с состоянием x . Именно, $\mu_i^k[x]$ обозначает для любых $x \in S$ и k функцию из M , в то время как $\mu_i^k[x](z)$ — значение функции $\mu_i^k[x]$ в точке $z \in S$. В частности, μ_i^kx — значение функции $\mu_i^k[x]$ в точке x .

Рассмотрим функции $\bar{\mu}_k \in M$, определенные формулой

$$\bar{\mu}_k[x] = \mu_0^k[x] \quad (x) \quad \forall x \in S \quad (11)$$

и функции $\bar{J}_k$, определенные формулой

$$\bar{J}_k(x) = H[x, \bar{\mu}_k(x), \lim_{i \rightarrow \infty} (T_{\mu_1^k[x]} \cdots T_{\mu_i^k[x]})(J_0)] \quad \forall x \in S. \quad (12)$$

Используя соотношения (10), (11) и предположения 1 и 1.1, получим

$$\begin{aligned} \bar{J}_k(x) &= \lim_{i \rightarrow \infty} (T_{\mu_0^k[x]} \cdots T_{\mu_i^k[x]})(J_0)(x) = \\ &= J_{\pi_k[x]}(x) \leq J^*(x) + \epsilon_k \quad \forall x \in S, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Из соотношений (12), (13) и предположения 1.2 получим

$$\begin{aligned} T_{\bar{\mu}_{k-1}}(\bar{J}_k)(x) &= H[x, \bar{\mu}_{k-1}(x), \bar{J}_k] \leq \\ &\leq H[x, \bar{\mu}_{k-1}(x), (J^* + \epsilon_k)] \leq H[x, \bar{\mu}_{k-1}(x), J^*] + \alpha \epsilon_k \leq \\ &\leq H[x, \bar{\mu}_{k-1}(x), \lim_{i \rightarrow \infty} (T_{\mu_1^{k-1}[x]} \cdots T_{\mu_i^{k-1}[x]})(J_0)] + \alpha \epsilon_k = \\ &= \bar{J}_{k-1}(x) + \alpha \epsilon_k \end{aligned}$$

для всех $k = 1, 2, \dots$ и $x \in S$ или окончательно

$$T_{\bar{\mu}_{k-1}}(\bar{J}_k) \leq \bar{J}_{k-1} + \alpha \epsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Используя это неравенство и предположение 1.2, получим

$$\begin{aligned} T_{\bar{\mu}_{k-2}}[T_{\bar{\mu}_{k-1}}(\bar{J}_k)] &\leq T_{\bar{\mu}_{k-2}}(\bar{J}_{k-1} + \alpha \epsilon_k) \leq \\ &\leq T_{\bar{\mu}_{k-2}}(\bar{J}_{k-1}) + \alpha^2 \epsilon_k \leq \bar{J}_{k-2} + (\alpha \epsilon_{k-1} + \alpha^2 \epsilon_k). \end{aligned}$$

Продолжая аналогичным образом, получим

$$(T_{\bar{\mu}_0} \cdots T_{\bar{\mu}_{k-1}})(\bar{J}_k) \leq \bar{J}_0 + (\alpha \epsilon_1 + \cdots + \alpha^k \epsilon_k) \leq J^* + \left(\sum_{i=0}^k \alpha^i \epsilon_i \right)$$

при $k = 1, 2, \dots$. Так как $J_0 \leq \bar{J}_k$, то отсюда следует, что

$$(T_{\bar{\mu}_0} \cdots T_{\bar{\mu}_{k-1}})(J_0) \leq J^* + \left(\sum_{i=0}^k \alpha^i \epsilon_i \right).$$

Обозначим $\pi_\epsilon = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$. Тогда, переходя к пределу в последнем неравенстве и используя (9), получим $J_{\pi_\epsilon} \leq J^* + \epsilon$. Если $\alpha < 1$, то в неравенстве (10) при любом k положим $\epsilon_k = \epsilon(1 - \alpha)$ и $\pi_k[x] = (\mu_0[x], \mu_1[x], \dots)$. Тогда стационарная стратегия $\pi_\epsilon = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$, где $\bar{\mu}(x) = \mu_0x$ для любого $x \in S$ удовлетворяет неравенству $J_{\pi_\epsilon} \leq J^* + \epsilon$. $\square$

Легко видеть, что требование $\alpha < 1$ существенно для того, чтобы в предыдущем предположении можно было выбрать стратегию π_ϵ среди стационарных стратегий. Например, положим $S = \{0\}$, $U(0) = (0, \infty)$, $J_0(0) = 0$, $H(0, u, J) = u + J(0)$. Тогда $J^*(0) = 0$, но для любой функции $\mu \in M$ имеем $J_\mu(0) = \infty$.

Используя предложение 5.1, можно доказать уравнение оптимальности в предположениях 1, 1.1 и 1.2.

Предложение 5.2. Пусть выполнены предположения 1, 1.1 и 1.2. Тогда $J^* = T(J^*)$. Более того, если функция $J' \in F$ такова, что $J' \geq J_0$ и $J' \geq T(J')$, то $J' \geq J^*$.

Доказательство. Для любых стратегий $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ и состояния $x \in S$ из предположения 1.1 следует, что

$$\begin{aligned} J_\pi(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_k})(J_0)(x) = \\ &= T_{\mu_0} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_1} \dots T_{\mu_k})(J_0) \right](x) \geq T_{\mu_0}(J^*)(x) \geq T(J^*)(x). \end{aligned}$$

Взяв инфимум от левой части по $\pi \in \Pi$, получим $J^* \geq T(J^*)$.

Чтобы доказать обратное неравенство, зададимся произвольными положительными числами ϵ_1 и ϵ_2 и рассмотрим стратегию $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$, такую, что

$$T_{\bar{\mu}_0}(J^*) \leq T(J^*) + \epsilon_1, \quad J_{\bar{\pi}_1} \leq J^* + \epsilon_2,$$

где $\bar{\pi}_1 = (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \dots)$. Такая стратегия существует по предложению 5.1. Мы имеем

$$\begin{aligned} J_{\bar{\pi}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\bar{\mu}_0} T_{\bar{\mu}_1} \dots T_{\bar{\mu}_k})(J_0) = T_{\bar{\mu}_0} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\bar{\mu}_1} \dots T_{\bar{\mu}_k})(J_0) \right] = \\ &= T_{\bar{\mu}_0}(J_{\bar{\pi}_1}) \leq T_{\bar{\mu}_0}(J^*) + \alpha \epsilon_2 \leq T(J^*) + (\epsilon_1 + \alpha \epsilon_2). \end{aligned}$$

Так как $J^* \leq J_{\bar{\pi}}$, а ϵ_1 и ϵ_2 можно взять произвольно малыми, то $J^* \leq T(J^*)$. Следовательно, $J^* = T(J^*)$.

Предположим, что функция $J' \in F$ удовлетворяет неравенствам $J' \geq J_0$ и $J' \geq T(J')$. Пусть $\{\epsilon_k\}$ — произвольная последовательность с $\epsilon_k > 0$. Рассмотрим стратегию $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots) \in \Pi$ такую, что

$$T_{\bar{\mu}_k}(J') \leq T(J') + \epsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из предположения 1.2 следует, что

$$\begin{aligned} J^* &= \inf_{\pi \in \Pi} \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_k})(J_0) \leq \inf_{\pi \in \Pi} \liminf_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_k})(J') \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (T_{\bar{\mu}_0} \dots T_{\bar{\mu}_k})(J') \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (T_{\bar{\mu}_0} \dots T_{\bar{\mu}_{k-1}})[T(J') + \epsilon_k] \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (T_{\bar{\mu}_0} \dots T_{\bar{\mu}_{k-1}})(J' + \epsilon_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} [(T_{\bar{\mu}_0} \dots T_{\bar{\mu}_{k-1}})(J') + \\ &+ \alpha^k \epsilon_k] \dots \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [T(J') + (\sum_{i=0}^k \alpha^i \epsilon_i)] \leq J' + (\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \epsilon_i). \end{aligned}$$

Так как величину $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \epsilon_i$ можно считать сколь угодно малой, то отсюда следует, что $J^* \leq J'$. $\square$

Следующие контрпримеры показывают, что предположения 1.1 и 1.2 в предположении 5.2 существенны.

Контрпример 1. Положим $S = \{0, 1\}$, $C = U(0) = U(1) = \{-1, 0\}$, $J_0(0) = J_0(1) = -1$, $H(0, u, J) = u$, если $J(1) \leq -1$, $H(0, u, J) = 0$, если $J(1) > -1$ и $H(1, u, J) = u$. Тогда $(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(0) = 0$ и $(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(1) = \mu_0(1)$ для $N \geq 1$. Таким образом, $J^*(0) = 0$, $J^*(1) = -1$, в то время как $T(J^*)(0) = -1$, $T(J^*)(1) = -1$ и, следовательно, $T(J^*) = J^*$. Заметим также, что J_0 является неподвижной точкой оператора T , хотя $J_0 \leq J^*$ и $J_0 \neq J^*$, так что второе утверждение предложения 5.2 не имеет места, когда $J_0 = J'$. Здесь предположения 1 и 1.1 выполнены, а предположение 1.2 — нет.

Контрпример 2. Положим $S = \{0, 1\}$, $C = U(0) = U(1) = \{0\}$, $J_0(0) = J_0(1) = 0$, $H(0, 0, J) = 0$, если $J(1) < \infty$, $H(0, 0, J) = \infty$, если $J(1) = \infty$, $H(1, 0, J) = J(1) + 1$. Тогда $(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(0) = 0$, а $(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(1) =$

$X(U_0)(1) = N$. Таким образом, $J^*(0) = 0$, $J^*(1) = \infty$. С другой стороны, $T(U^*)(0) = T(U^*)(1) = \infty$ и $J^* \neq T(U^*)$. Здесь предположения 1 и 1.2 удовлетворяются, а предположение 1.1 — нет.

Из предложения 5.1 получаем такой результат.

Следствие 5.2.1. Пусть выполнены предположения 1, 1.1 и 1.2. Тогда для любой стационарной стратегии $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ имеет место равенство $J_\mu = T_\mu(U_\mu)$. Более того, если функция $J' \in F$ такова, что $J' \geq J_0$ и $J' \geq T_\mu(J')$, то $J' \geq J_\mu$.

Доказательство. Рассмотрим частный случай нашей задачи, когда вместо $U(x)$ множество управлений в состоянии x равно $U_\mu(x) = \{\mu(x)\}$. Применение предложения 5.2 приводит к нужному результату. $\square$

Приведем теперь аналог предложения 5.2 в предположении D.

Предложение 5.3. Пусть выполнены предположения D и D.1. Тогда $J^* = T(U^*)$. Более того, если функция $J' \in F$ такова, что $J' \leq J_0$ и $J' \leq T(U')$, то $J' \leq J^*$.

Доказательство. Сначала рассмотрим следующую лемму.

Лемма 5.1. Пусть выполнено предположение D. Тогда

$$J^* = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*, \quad (15)$$

где J_N^* — функция оптимальных издержек для задачи с горизонтом N .

Доказательство. Ясно, что для любого N имеет место неравенство $J^* \leq J_N^*$ и, следовательно, $J^* \leq \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*$. Кроме того, для любой стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ имеем

$$(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(U_0) \geq J_N^*.$$

Переходя к пределу в обеих частях неравенства, получим, что $J_\pi \geq \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*$ и, следовательно, $J^* \geq \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*$. $\square$

Доказательство предложения 5.3 (продолжение). Вернемся теперь к доказательству предложения 5.3. Рассуждения, полностью аналогичные использованным при доказательстве леммы 5.1, показывают, что в предположении D мы имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J_N^*) = \inf_{u \in U(x)} \lim_{N \rightarrow \infty} H(x, u, J_N^*) \quad (16)$$

для всех $x \in S$. Используя предположение D.1, получаем отсюда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T(U_N^*) = T(\lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*). \quad (17)$$

Так как предположения D и D.1 эквивалентны предположению F.1' из главы 3, то из следствия 3.1.1 получаем равенство $J_N^* = T^N(U_0)$, откуда можно заключить, что $T(U_N^*) = T^{N+1}(U_0) = J_{N+1}^*$. Комбинируя это равенство с равенствами (15), (17), получаем, что $J^* = T(U^*)$.

Чтобы завершить доказательство, рассмотрим функцию $J' \in F$ такую, что $J' < J_0$ и $J' \leq T(U')$. Тогда

$$\begin{aligned} J^* &= \inf_{\pi \in \Pi} \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(U_0) > \\ &> \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\pi \in \Pi} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0) > \\ &> \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\pi \in \Pi} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{N-1}})(U') > \lim_{N \rightarrow \infty} T^N(U') \geq J'. \end{aligned}$$

Следовательно, $J^* \geq J'$. $\square$

В контрпримерах 1 и 2 раздела 3.2 выполнено предположение D, а предположение D.1 — нет. В обоих случаях $J^* \neq T(J^*)$, что читатель может легко проверить.

Беглый просмотр доказательства предложения 5.3 обнаруживает, что единственное место, где используется предположение D.1, это проверка соотношений

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T(J_N^*) = T(\lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*)$$

и $J_N^* = T^N(J_0)$. Если эти соотношения могут быть получены независимо, то утверждения предложения 5.3 будут справедливы. Значит, имеет место такой результат.

Следствие 5.3.1. Пусть выполнены предположения D и D.2. Пусть S — конечное множество и $J^*(x) > -\infty$ для любого $x \in S$. Тогда $J^* = T(J^*)$. Более того, если функция $J' \in F$ такова, что $J' \leq J_0$ и $J' \leq T(J')$, то $J' \leq J^*$.

Доказательство. Почти дословное повторение доказательства предложения 3.1 (6) показывает, что в условиях D, D.2 и в предположении, что $J^*(x) > -\infty$ для любого $x \in S$ имеем $J_N^* = T^N(J_0)$ для $N = 1, 2, \dots$. Мы сейчас покажем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H(x, u, J_N^*) = H(x, u, \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*) \quad \forall x \in S, u \in U(x).$$

Отсюда ввиду (16) вытекает (17), и доказательство завершается, как в предложении 5.3.

Предположим противное, т.е. что для некоторых $\tilde{x} \in S$ и $\tilde{u} \in U(\tilde{x})$ и $\epsilon > 0$ выполняется неравенство

$$H(\tilde{x}, \tilde{u}, J_k^*) - \epsilon > H(\tilde{x}, \tilde{u}, \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из конечности множества S и того факта, что $J^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*(x) > -\infty$ для любого x , получаем, что

$$J_k^* - (\epsilon/\alpha) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^* \quad \forall k \geq \bar{k}$$

для некоторого положительного целого числа $\bar{k}$. Используя предположение D.2, получаем, что

$$\begin{aligned} H(\tilde{x}, \tilde{u}, J_k^*) - \epsilon &\leq H(\tilde{x}, \tilde{u}, J_k^* - (\epsilon/\alpha)) \leq \\ &\leq H(\tilde{x}, \tilde{u}, \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*) \end{aligned}$$

для всех $k \geq \bar{k}$, а это противоречит предположению. $\square$

Точно так же, как и в предположении I, имеет место такой результат.

Следствие 5.3.2. Пусть выполнены предположения D и D.1. Тогда для любой стационарной стратегии $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ имеет место равенство $J_\mu = T_\mu(J_\mu)$. Более того, если функция $J' \in F$ такова, что $J' \leq J_0$ и $J' \leq T_\mu(J')$, то $J' \leq J_\mu$.

Стоит отметить, что предложения 5.2 и 5.3 могут служить основой для вычисления функции J^* в случае, когда пространство состояний S конечно и состоит из n элементов $x_1, \dots, x_n$. Из предложения 5.2 следует, что в предположениях I, I.1 и I.2 числа $J^*(x_1), \dots, J^*(x_n)$ дают решение

следующей задачи:

минимизировать $\sum_{i=1}^n \lambda_i$

при условиях $\lambda_i \geq \inf_{u \in U(x_i)} H(x_i, u, J_\lambda), \quad i = 1, \dots, n,$

$\lambda_i \geq J_0(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$

где J_λ — функция со значениями $J_\lambda(x_i) = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n.$ В предположениях D и D.1 или D, D.2 и при условии, что $J^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$, соответствующая задача имеет вид:

максимизировать $\sum_{i=1}^n \lambda_i$

при условиях $\lambda_i \leq H(x_i, u, J_\lambda), \quad i = 1, \dots, n, \quad u \in U(x_i),$

$\lambda_i \leq J_0(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$

Если $U(x_i)$ также конечно для любого i , то предшествующая задача становится конечномерной (возможно — нелинейной) задачей математического программирования.

5.3. Характеризация оптимальных стратегий

Справедливы следующие необходимые и достаточные условия оптимальности стационарной стратегии.

Предложение 5.4. Пусть выполнены предположения 1.1.1 и 1.2. Стационарная стратегия $\pi^* = (\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна тогда и только тогда, когда

$$T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*), \quad (18)$$

Более того, если для любого $x \in S$ существует стратегия, которая оптимальна в точке x , то существует стационарная оптимальная стратегия.

Доказательство. Если стратегия π^* оптимальна, то $J_{\mu^*} = J^*$, и результат следует из предложения 5.2 и следствия 5.2.1. Обратно, если $T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*)$, то из равенства $J^* = T(J^*)$ (см. предложение 5.2) следует, что $T_{\mu^*}(J^*) = J^*$. В силу следствия 5.2.1 имеет место неравенство $J_{\mu^*} \leq J^*$ и, следовательно, стратегия π^* оптимальна.

Если стратегия $\pi_x^* = (\mu_{0,x}^*, \mu_{1,x}^*, \dots)$ оптимальна при $x \in S$, то из предположения 1.1 следует, что

$$J^*(x) = J_{\pi_x^*}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_{0,x}^*} \cdots T_{\mu_{k,x}^*})(J_0)(x) =$$

$$= T_{\mu_{0,x}^*} [\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_{1,x}^*} \cdots T_{\mu_{k,x}^*})(J_0)](x) \geq$$

$$\geq T_{\mu_{0,x}^*}(J^*)(x) \geq T(J^*)(x) = J^*(x).$$

Следовательно, $T_{\mu_{0,x}^*}(J^*)(x) = T(J^*)(x)$ для любого $x \in S$. Определим функцию $\mu^* \in M$ формулой $\mu^*(x) = \mu_{0,x}^*(x)$. Тогда $T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*)$ и, как только что было доказано, стационарная стратегия $(\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна. $\square$

Предложение 5.5. Пусть выполнены предположения D и D.1. Стационарная стратегия $\pi^* = (\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна тогда и только тогда, когда

$$T_{\mu^*}(J_{\mu^*}) = T(J_{\mu^*}). \quad (19)$$

Доказательство. Если стратегия π^* оптимальна, то $J_{\mu^*} = J^*$, и результат следует из предложения 5.3 и следствия 5.3.2. Обратно, если $T_{\mu^*}(J_{\mu^*}) = T(J_{\mu^*})$, то мы получаем из следствия 5.3.2, что $J_{\mu^*} = T(J_{\mu^*})$, а предложение 5.3 приводит к неравенству $J_{\mu^*} \leq J^*$. Следовательно, стратегия π^* оптимальна. $\square$

Примеры, когда выполнено предположение D и стратегия π^* удовлетворяет условию (18), либо выполнены I и (19), но стратегия π^* не оптимальна, приведены в [12], раздел 6.4.

Предложение 5.4 показывает, что стационарная оптимальная стратегия существует тогда и только тогда, когда инфимум в уравнении оптимальности

$$J^*(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J^*)$$

достигается для любого $x \in S$. Если инфимум не достигается для некоторого $x \in S$, то, как показывает следующее предложение, уравнение оптимальности все же может быть использовано для получения ϵ -оптимальной стратегии, причем ее можно выбрать стационарной, если только число α в предположении 1.2 строго меньше единицы.

Предложение 5.6. Пусть выполнены предположения I и 1.1 и 1.2. Тогда:

(а) если числа $\{\epsilon_k\}$ и стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots) \in \Pi$ таковы, что $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \epsilon_k = \epsilon$, $\epsilon_i > 0$, $i = 0, 1, \dots$, и

$$T_{\mu_k^*}(J^*) \leq T(J^*) + \epsilon_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то $J^* \leq J_{\mu^*} \leq J^* + \epsilon$;

(б) если число α из предположения 1.2 строго меньше единицы, число $\epsilon > 0$ и стратегия $\mu^* \in M$ таковы, что

$$T_{\mu^*}(J^*) \leq T(J^*) + \epsilon(1 - \alpha),$$

то $J^* \leq J_{\mu^*} \leq J^* + \epsilon$.

Доказательство.

(а) Так как $T(J^*) = J^*$, то $T_{\mu_k^*}(J^*) \leq J^* + \epsilon_k$, и, применяя оператор $T_{\mu_{k-1}^*}$ к обеим частям неравенства, получаем

$$(T_{\mu_{k-1}^*} T_{\mu_k^*})(J^*) \leq T_{\mu_{k-1}^*}(J^*) + \alpha \epsilon_k \leq J^* + (\epsilon_{k-1} + \alpha \epsilon_k).$$

Применяя аналогичным образом оператор $T_{\mu_{k-2}^*}$ и повторяя процесс, получаем, что

$$(T_{\mu_0^*} \dots T_{\mu_k^*})(J^*) \leq J^* + \left(\sum_{i=0}^k \alpha^i \epsilon_i \right)$$

при $k = 1, 2, \dots$. Так как $J_0 \leq J^*$, откуда следует, что

$$(T_{\mu_0^*} \dots T_{\mu_k^*})(J_0) \leq J^* + \left(\sum_{i=0}^k \alpha^i \epsilon_i \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим, что $J_{\pi^*} \leq J^* + \epsilon$.

(б) Это утверждение доказывается, если в предыдущем рассуждении положить $\epsilon_k = \epsilon(1 - \alpha)$ и $\mu_k^* = \mu^*$. $\square$

Слабый аналог утверждения (а) из предложения 5.6 в предположении D содержится в следствии 5.7.1. Однако нам не удалось получить полный аналог утверждения (б) или условия для существования стационарной оптимальной стратегии в предположении D.

5.4. Сходимость алгоритма динамического программирования — существование стационарных оптимальных стратегий

Алгоритм ДП состоит в последовательном вычислении функций $T(J_0)$, $T^2(J_0), \dots$. В предположении I имеем $T^k(J_0) \leq T^{k+1}(J_0)$ для всех k , а в предположении D, наоборот, $T^{k+1}(J_0) \leq T^k(J_0)$ для всех k . Поэтому можно определить функцию $J_\infty \in F$ формулой

$$J_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} T^N(J_0)(x) \quad \forall x \in S. \quad (20)$$

Мы хотим выяснить, справедливо ли равенство $J_\infty = J^*$. Следующее предположение показывает, что если выполняется предположение D, то $J_\infty = J^*$ при довольно слабых предположениях.

Предложение 5.7. Пусть выполнено предположение D или полностью предположение D.1, или $J_N^* = T^N(J_0)$ для всех N , где J_N^* — функция оптимальных издержек при горизонте N . Тогда $J_\infty = J^*$.

Доказательство. Согласно лемме 5.1 из предположения D следует, что $J^* = \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^*$. Следствие 3.1.1 показывает, что при наших предположениях $J_N^* = T^N(J_0)$. Следовательно, $J^* = \lim_{N \rightarrow \infty} T^N(J_0) = J_\infty$. $\square$

Следующий результат представляет собой слабый аналог предложения 5.1 и предложения 5.6 (а) в предположении D.

Следствие 5.7.1. Пусть выполнены предположение D, предположение D.2, и пусть S конечно и $J^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$. Тогда для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная стратегия, т.е. такая стратегия $\pi_\epsilon \in \Pi$, что $J^* \leq J_{\pi_\epsilon} \leq J^* + \epsilon$.

Доказательство. Для любого N обозначим $\epsilon_N = \epsilon/2(1 + \alpha + \dots + \alpha^{N-1})$, и пусть стратегия $\pi_N = \{\mu_0^N, \mu_1^N, \dots, \mu_{N-1}^N, \mu, \mu, \dots\}$ такова, что $\mu \in M$, $\mu_k^N \in M$ и

$$(T_{\mu_k^N} T^{N-k-1})(J_0) \leq T^{N-k}(J_0) + \epsilon_N$$

для $k = 0, 1, \dots, N-1$. Так как $T_{\mu_{N-1}^N}(J_0) \leq T(J_0) + \epsilon_N$, то, применяя оператор $T_{\mu_{N-2}^N}$ к обеим частям, получим

$$(T_{\mu_{N-2}^N} T_{\mu_{N-1}^N})(J_0) \leq (T_{\mu_{N-2}^N} T)(J_0) + \alpha \epsilon_N \leq T^2(J_0) + (1 + \alpha) \epsilon_N.$$

Продолжая аналогичным образом, придем к неравенству

$$(T_{\mu_0^N} \dots T_{\mu_{N-1}^N})(J_0) \leq T^N(J_0) + (1 + \alpha + \dots + \alpha^{N-1}) \epsilon_N,$$

откуда получим, что $J_{\pi_N} \leq T^N(J_0) + \epsilon/2$ для $N = 0, 1, \dots$. Как и при доказательстве следствия 5.3.1, из наших предположений вытекает, что $J_N^* = T^N(J_0)$ для всех N , так что в силу предложения 5.7 имеет место равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} T^N(J_0) = J^*$. Пусть число $\bar{N}$ таково, что $T^{\bar{N}}(J_0) \leq J^* + \epsilon/2$. Такое $\bar{N}$ существует, так как множество S конечно и $J^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$. Тогда $J_{\pi_{\bar{N}}} \leq J^* + \epsilon$ и $\pi_{\bar{N}}$ является желаемой стратегией. $\square$

Как показывает следующий контрпример, в предположениях I, I.1 и I.2 равенство $J_\infty = J^*$ может не выполняться даже для простых задач детерминированного оптимального управления.

Контрпример 3. Пусть $S = [0, \infty)$, $C = U(x) = (0, \infty)$ для всех $x \in S$, $J_0(x) = 0$ для всех $x \in S$ и

$$H(x, u, J) = x + J(2x + u) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x).$$

Тогда легко проверить, что

$$J^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_\pi(x) = \infty \quad \forall x \in S,$$

хотя $T^N(J_0)(0) = 0$, $N = 1, 2, \dots$. Следовательно, $J_\infty(0) = 0$ и $J_\infty(0) < J^*(0)$.

В этом примере $J^*(x) = \infty$ для всех $x \in S$. Существуют другие примеры, где $J^* \neq J_\infty$ и $J^*(x) < \infty$ для всех $x \in S$ (см. [83], с. 880). Следующий промежуточный результат показывает, что для того чтобы $J_\infty = J^*$, необходимо и достаточно, чтобы $J_\infty = T(J_\infty)$.

Предложение 5.8. Пусть выполнены предположения 1, 1.1 и 1.2. Тогда

$$J_\infty \leq T(J_\infty) \leq T(J^*) = J^*. \quad (21)$$

Далее, равенства

$$J_\infty = T(J_\infty) = T(J^*) = J^* \quad (22)$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$J_\infty = T(J_\infty). \quad (23)$$

Доказательство. Ясно, что $J_\infty \leq J_\pi$ для всех стратегий $\pi \in \Pi$ и, следовательно, $J_\infty \leq J^*$. Более того, в силу предложения 5.2 имеем $T(J^*) = J^*$. Кроме того,

$$T(J_\infty) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J_\infty) \geq \inf_{u \in U(x)} H(x, u, T^k(J_0)) = T^{k+1}(J_0)$$

для всех $k \geq 0$. Взяв предел от правой части, получим неравенство $T(J_\infty) \geq J_\infty$, что вместе с соотношениями $J_\infty \leq J^*$ и $T(J^*) = J^*$ доказывает неравенства (21). Если выполнены равенства (22), то равенство (23) также выполняется. И обратно, пусть равенство (23) выполнено. Тогда, поскольку $J_\infty \geq J_0$, из предложения 5.2 следует, что $J_\infty \geq J^*$, и это неравенство вместе с (21) доказывает (22). $\square$

Ниже мы приводим необходимые и достаточные условия для равенства $J_\infty = T(J_\infty)$ [и, следовательно, (22)] в предположениях 1, 1.1 и 1.2. Заодно будет получено полезное достаточное условие для выполнения равенства $J_\infty = T(J_\infty)$, которое одновременно гарантирует существование стационарной оптимальной стратегии.

Для любой функции $J \in F$ обозначим через $E(J)$ надграфик J , т.е. множество в SR , определяемое следующим образом:

$$E(J) = \{(x, \lambda) | J(x) \leq \lambda\}. \quad (24)$$

В предположении 1 имеем $T^k(J_0) \leq T^{k+1}(J_0)$ для всех k и $J_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(J_0)$, поэтому легко видеть, что

$$E(J_\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} E[T^k(J_0)]. \quad (25)$$

Рассмотрим множество C_k в SCR , задаваемое выражением

$$C_k = \{(x, u, \lambda) | H[x, u, T^{k-1}(J_0)] \leq \lambda, x \in S, u \in U(x)\}, \quad (26)$$

$$k \geq 1.$$

Обозначим через $P(C_k)$ проекцию C_k на SR , т.е. множество

$$P(C_k) = \{ (x, \lambda) \mid \exists u \in U(x) \text{ т.ч. } (x, u, \lambda) \in C_k \}^*. \quad (27)$$

Рассмотрим также множество

$$\overline{P(C_k)} = \{ (x, \lambda) \mid \exists \{\lambda_n\} \text{ т.ч. } \lambda_n \rightarrow \lambda, (x, \lambda_n) \in P(C_k), n = 0, 1, \dots \} \quad (28)$$

Множество $\overline{P(C_k)}$ получается из $P(C_k)$ добавлением к каждому x точки $[x, \bar{\lambda}(x)]$, где $\bar{\lambda}(x)$ является, возможно, несуществующей граничной точкой полупрямой $\{\lambda \mid (x, \lambda) \in P(C_k)\}$. Имеем следующую лемму.

Лемма 5.2. Пусть выполнено предположение 1. Тогда

$$P(C_k) \subset \overline{P(C_k)} = E[T^k(J_0)] \quad (29)$$

для всех $k \geq 1$. Более того, равенства

$$P(C_k) = \overline{P(C_k)} \stackrel{!}{=} E[T^k(J_0)] \quad (30)$$

выполняются тогда и только тогда, когда в уравнении

$$T^k(J_0)(x) = \inf_{u \in U(x)} H[x, u, T^{k-1}(J_0)] \quad (31)$$

инфимум достигается для любого $x \in S$.

Доказательство. Если $(x, \lambda) \in E[T^k(J_0)]$, то

$$T^k(J_0)(x) = \inf_{u \in U(x)} H[x, u, T^{k-1}(J_0)] \leq \lambda.$$

Пусть последовательности $\{\epsilon_n\}$ и $\{u_n\} \subset U(x)$ таковы, что $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, и $H[x, u_n, T^{k-1}(J_0)] \leq T^k(J_0) + \epsilon_n \leq \lambda + \epsilon_n$.

Тогда $(x, u_n, \lambda + \epsilon_n) \in C_k$ и $(x, \lambda + \epsilon_n) \in P(C_k)$ для всех n . Так как $\lambda + \epsilon_n \rightarrow \lambda$, из формулы (28) получаем, что $(x, \lambda) \in \overline{P(C_k)}$. Следовательно,

$$E[T^k(J_0)] \subset \overline{P(C_k)}. \quad (32)$$

Обратно, пусть $(x, \lambda) \in \overline{P(C_k)}$. Тогда вследствие соотношений (26) – (28) существуют последовательность $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow \lambda$ и соответствующая последовательность $\{u_n\} \subset U(x)$ такие, что

$$T^k(J_0)(x) \leq H[x, u_n, T^{k-1}(J_0)] \leq \lambda_n.$$

Взяв предел при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $T^k(J_0)(x) \leq \lambda$ и $(x, \lambda) \in E[T^k(J_0)]$. Следовательно,

$$\overline{P(C_k)} \subset E[T^k(J_0)],$$

и, используя соотношение (32), получим (29).

Чтобы доказать эквивалентность соотношения (30) достижению инфимума в (31), предположим сначала, что инфимум при каждом $x \in S$ достигается функцией $\mu_{k-1}^*(x)$. Тогда для любой пары $(x, \lambda) \in E[T^k(J_0)]$ имеем

$$H[x, \mu_{k-1}^*(x), T^{k-1}(J_0)] \leq \lambda,$$

откуда по формуле (27) следует, что $(x, \lambda) \in P(C_k)$. Следовательно, $E[T^k(J_0)] \subset P(C_k)$ и с помощью (29) мы получаем (30). Обратно, если соотношение (30) выполняется, то $[x, T^k(J_0)(x)] \subset P(C_k)$ для каждо-

*1) Символ $\exists$ означает "существует", а буквы "т.ч." – слова "такое, что".

го x , при котором $T^k(J_0)(x) < \infty$. Тогда из (26) и (27) следует, что существует функция $\mu_{k-1}^*(x) \in U(x)$ такая, что

$$H[x, \mu_{k-1}^*, T^{k-1}(J_0)] \leq T^k(J_0)(x) = \inf_{u \in U(x)} H[x, u, T^{k-1}(J_0)].$$

Следовательно, инфимум в формуле (31) достигается для всех x , при которых $T^k(J_0)(x) < \infty$. Он тривиально достигается во всех точках $u \in U(x)$, когда $T^k(J_0)(x) = \infty$, что завершает доказательство. $\square$

Рассмотрим теперь множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ и подобно формулам (27) и (28) определим множества

$$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) = \{(x, \lambda) | \exists u \in U(x) \text{ т.ч. } (x, u, \lambda) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\}, \quad (33)$$

$$\overline{P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k)} = \{(x, \lambda) | \exists \{\lambda_n\} \text{ т.ч. } \lambda_n \rightarrow \lambda, (x, \lambda_n) \in P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k)\}. \quad (34)$$

Используя формулу (25) и лемму 5.2, нетрудно получить, что

$$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} P(C_k) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P(C_k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E[T^k(J_0)] = E(J_{\infty}). \quad (35)$$

$$\overline{P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k)} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P(C_k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E[T^k(J_0)] = E(J_{\infty}). \quad (36)$$

Имеет место следующий результат.

Предложение 5.9. Пусть выполнены предположения 1, 1.1 и 1.2. Тогда:

(а) равенство $J_{\infty} = T(J_{\infty})$ (или, что равносильно $J_{\infty} = J^*$) имеет место тогда и только тогда, когда

$$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P(C_k)}; \quad (37)$$

(б) равенство $J_{\infty} = T(J_{\infty})$ (или, что равносильно $J_{\infty} = J^*$) справедливо, и инфимум в формуле

$$J_{\infty}(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J_{\infty}) \quad (38)$$

достигается для любого $x \in S$ (или, что равносильно, существует стационарная оптимальная стратегия) тогда и только тогда, когда

$$P(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P(C_k)}. \quad (39)$$

Доказательство.

(а) Предположим, что $J_{\infty} = T(J_{\infty})$, и пусть пара (x, λ) принадлежит множеству $E(J_{\infty})$, т.е.

$$\inf_{u \in U(x)} H(x, u, J_{\infty}) = J_{\infty}(x) \leq \lambda.$$

Пусть $\{\epsilon_n\}$ — произвольная последовательность с $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$. Тогда существует последовательность $\{u_n\}$ такая, что

$$H(x, u_n, J_{\infty}) \leq \lambda + \epsilon_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$H[x, u_n, T^{k-1}(J_0)] \leq \lambda + \epsilon_n, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что $(x, u_n, \lambda + \epsilon_n) \in C_k$ при всех k и n , и $(x, u_n, \lambda + \epsilon_n) \in \cap_{k=1}^{\infty} C_k$ при всех n . Следовательно, $(x, \lambda + \epsilon_n) \in P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k)$ при всех n , и так как $\lambda + \epsilon_n \rightarrow \lambda$, то получаем, что $(x, \lambda) \in P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k)$. Поэтому

$$E(J_{\infty}) \subset P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k),$$

и, используя (36), получаем (37).

Обратно, пусть выполнено равенство (37). Тогда из соотношения (36) имеем $P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k) = E(J_{\infty})$. Пусть точка $x \in S$ такая, что $J_{\infty}(x) < \infty$. Тогда $[x, J_{\infty}(x)] \in P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k)$ и существуют последовательность $\{\lambda_n\}$ с $\lambda_n \rightarrow J_{\infty}(x)$ и последовательность $\{u_n\} \subset U(x)$ такие, что

$$H[x, u_n, T^{k-1}(J_0)] \leq \lambda_n, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

Взяв предел по k и используя предположение 1.1, получим $H(x, u_n, J_{\infty}) \leq \lambda_n$, а так как $T(J_{\infty})(x) \leq H(x, u_n, J_{\infty})$, то, следовательно, $T(J_{\infty})(x) \leq \lambda_n$. Взяв предел при $n \rightarrow \infty$, получим $T(J_{\infty})(x) \leq J_{\infty}(x)$ для всех $x \in S$ таких, что $J_{\infty}(x) < \infty$. Так как полученное неравенство выполняется также и для всех $x \in S$ таких, что $J_{\infty}(x) = \infty$, то $T(J_{\infty}) \leq J_{\infty}$. С другой стороны, из предложения 5.8 следует, что $J_{\infty} \leq T(J_{\infty})$. Эти два неравенства означают, что $J_{\infty} = T(J_{\infty})$.

(б) Предположим, что $J_{\infty} = T(J_{\infty})$ и что инфимум в формуле (38) достигается при любом $x \in S$. Тогда существует функция $\mu^* \in M$ такая, что

$$H[x, \mu^*(x), J_{\infty}] \leq \lambda$$

для любой пары $(x, \lambda) \in E(J_{\infty})$. Следовательно, $H[x, \mu^*(x), T^{k-1}(J_0)] \leq \lambda$ для $k = 1, 2, \dots$ и $[x, \mu^*(x), \lambda] \in \cap_{k=1}^{\infty} C_k$. Стало быть, $(x, \lambda) \in P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k)$. Следовательно,

$$E(J_{\infty}) \subset P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k)$$

и (39) получится из (35).

Обратно, пусть выполняется условие (39). Тогда

$$[x, J_{\infty}(x)] \in E(J_{\infty}) = P(\cap_{k=1}^{\infty} C_k)$$

для всех $x \in S$ таких, что $J_{\infty}(x) < \infty$. Таким образом, существует функция $\mu^*(x) \in U(x)$ такая, что

$$[x, \mu^*(x), J_{\infty}(x)] \in \cap_{k=1}^{\infty} C_k,$$

откуда мы заключаем, что

$$H[x, \mu^*(x), T^{k-1}(J_0)] \leq J_{\infty}(x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Переходя к пределу и используя предположение 1.1, видим, что

$$T(J_{\infty})(x) \leq H[x, \mu^*(x), J_{\infty}] \leq J_{\infty}(x).$$

Отсюда следует, что $T(J_{\infty}) \leq J_{\infty}$, а так как по предложению 5.8 $J_{\infty} \leq T(J_{\infty})$, то окончательно получим, что $J_{\infty} = T(J_{\infty})$. Более того, последнее неравенство показывает, что функция μ^* доставляет инфимум в формуле (38), если $J_{\infty}(x) < \infty$. Если $J_{\infty}(x) = \infty$, то любое управление $u \in U(x)$ доставляет инфимум, и доказательство завершено. $\square$

Из предложения 5.8 видно, что равенство $J_\infty = T(J_\infty)$ эквивалентно тому, что законна следующая перестановка операций взятия инфимума и предела:

$$J_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\pi \in \Pi} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_k})(J_0) = \inf_{\pi \in \Pi} \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_k})(J_0) = J^*.$$

Таким образом, предложение 5.9 утверждает, что перестановочность инфимума фактически эквивалентна возможности перестановки операций проектирования и пересечения вида (37) или (39).

Следующее предложение содержит предположение компактности, гарантирующее выполнение условия (39).

Предложение 5.10. Пусть выполнены предположения 1, 1.1 и 1.2, и пусть пространство управлений S — хаусдорфово пространство. Предположим, что существует такое натуральное число $\bar{k}$, что для любых $x \in S$, $\lambda \in R$ и $k \geq \bar{k}$ множество

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in U(x) \mid H[x, u, T^k(J_0)] \leq \lambda\} \quad (40)$$

компактно. Тогда

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P(C_k)} \quad (41)$$

и (в силу предложений 5.8 и 5.9)

$$J_\infty = T(J_\infty) = T(J^*) = J^*.$$

Более того, тогда существует стационарная оптимальная стратегия.

Доказательство. Как это следует из (35), достаточно показать, что

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} P(C_k), \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} P(C_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P(C_k)}. \quad (42)$$

Пусть пара (x, λ) принадлежит множеству $\bigcap_{k=1}^{\infty} P(C_k)$. Тогда существует последовательно $\{u_n\} \in U(x)$ такая, что

$$H[x, u_n, T^k(J_0)] \leq H[x, u_n, T^n(J_0)] \leq \lambda \quad \forall n \geq k,$$

или, что эквивалентно,

$$u_n \in U_k(x, \lambda) \quad \forall n \geq k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Так как множество $U_k(x, \lambda)$ компактно при $k \geq \bar{k}$, то последовательность $\{u_n\}$ имеет предельную точку $\bar{u}$ и $\bar{u} \in U_k(x, \lambda) \quad \forall k \geq \bar{k}$. Но $U_0(x, \lambda) \supset U_1(x, \lambda) \supset \dots$, поэтому $\bar{u} \in U_k(x, \lambda)$ при $k = 0, 1, \dots$. Следовательно,

$$H[x, \bar{u}, T^k(J_0)] \leq \lambda, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и $(x, \bar{u}, \lambda) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$. Отсюда следует, что

$$(x, \lambda) \in P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) \quad \text{и}$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k\right) \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} P(C_k).$$

Из компактности множества $U_k(x, \lambda)$ и результатов леммы 3.1 следует также, что инфимум в формуле (31) достигается при любых $x \in S$ и $k > \bar{k}$. Согласно лемме 5.2, $P(C_k) = \overline{P(C_k)}$ для $k > \bar{k}$, а так как $P(C_1) \supset$

$\sup P(C_2) \sup \dots$ и $\overline{P(C_1)} \sup \overline{P(C_2)} \sup \dots$, мы имеем

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} P(C_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{P(C_k)}.$$

Тем самым (42) доказано. $\square$

Следующее предложение показывает, что с помощью алгоритма ДП в пределе можно получить стационарную оптимальную стратегию.

Предложение 5.11. Пусть выполнены условия предложения 5.10. Тогда:

(а) существует стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots)$, доставляющая инфимум в алгоритме ДП для всех $k \geq \bar{k}$, т.е. такая, что

$$(T_{\mu_k^*} T^k)(J_0) = T^{k+1}(J_0) \quad \forall k \geq \bar{k}; \quad (43)$$

(б) для любой стратегии π^* , удовлетворяющей условию (43), последовательность $\{\mu_k^*(x)\}$ имеет по крайней мере одну предельную точку при любом $x \in S$ с $J^*(x) < \infty$;

(в) если функция $\mu^*: S \rightarrow C$ такова, что $\mu^*(x)$ является предельной точкой последовательности $\{\mu_k^*(x)\}$ при всех $x \in S$ с $J^*(x) < \infty$, и $\mu^*(x) \in U(x)$ для всех $x \in S$ с $J^*(x) = \infty$, то стационарная стратегия $(\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна.

Доказательство.

(а) Следует из леммы 3.1.

(б) Для любой стратегии $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots)$, удовлетворяющей условиям (43), и любого $x \in S$ с $J^*(x) < \infty$, имеем

$$\begin{aligned} H[x, \mu_n^*(x), T^k(J_0)] &\leq \\ &\leq H[x, \mu_n^*(x), T^n(J_0)] \leq J^*(x) \end{aligned}$$

$$\forall k \geq \bar{k}, \quad n \geq k.$$

Следовательно,

$$\mu_n^*(x) \in U_k[x, J^*(x)] \quad \forall k \geq \bar{k}, \quad n \geq k.$$

Так как множество $U_k[x, J^*(x)]$ компактно, то последовательность $\{\mu_n^*(x)\}$ имеет по крайней мере одну предельную точку. Более того, любая предельная точка $\mu^*(x)$ последовательности $\{\mu_n^*(x)\}$ принадлежит множеству $U(x)$ и удовлетворяет неравенству

$$H[x, \mu^*(x), T^k(J_0)] \leq J^*(x) \quad \forall k \geq \bar{k}. \quad (44)$$

Переходя в неравенстве (44) к пределу и используя предположение 1.1, получим

$$H[x, \mu^*(x), J_\infty] = H[x, \mu^*(x), J^*] \leq J^*(x)$$

для всех $x \in S$, при которых $J^*(x) < \infty$. То же выполняется тривиальным образом для всех $x \in S$, при которых $J^*(x) = \infty$. Следовательно, $T_{\mu^*}(J^*) \leq J^* = T(J^*)$, откуда $T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*)$. По предложению 5.4 стратегия $(\mu^*, \mu^*, \dots)$ оптимальна. $\square$

В ряде частных случаев компактность множеств $U_k(x, \lambda)$ может быть проверена. Несколько таких примеров приведены в конце раздела 3.2. Другим примером является полунепрерывная снизу модель из раздела 8.3, вариант которой с бесконечным горизонтом рассматривается в следствии 9.17.2.

5.5. Применение к частным случаям

Покажем теперь, что все результаты этой главы применимы к задачам стохастического оптимального управления из пп. 2.3.3. и 2.3.4. Однако только часть их применима к задаче минимаксного управления из п. 2.3.5, так как без дополнительных предположений не выполняется условие D.1.

Стохастическое оптимальное управление — формулировка с внешним интегралом

Предложение 5.12. *Рассмотрим отображение*

$$H(x, u, J) = E^*\{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] | x, u\} \quad (45)$$

из п. 2.3.3 и положим $J_0(x) = 0$ для любых $x \in S$. Если

$$0 \leq g(x, u, w) \quad \forall x \in S, \quad (46)$$

$$u \in U(x), \quad w \in W,$$

то предположения I, I.1 и I.2 выполнены со значением скаляра из предположения I.2, равным α . Если

$$g(x, u, w) \leq 0 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W \quad (47)$$

то предположения D, D.1 и D.2 выполнены со значением скаляра в D.2, равным α .

Доказательство. Предположения I и D выполняются тривиальным образом, если учесть соответственно неравенства (46) или (47) и тот факт, что $J_0(x) = 0$ для любых $x \in S$. Предположения I.1 и D.1. выполняются в силу теоремы о монотонном предельном переходе для внешнего интеграла (предложение A.1). Из леммы A.2 следует, что при условии (46)

$$\begin{aligned} H(x, u, J+r) &= E^*\{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] + \alpha r | x, u\} = \\ &= E^*\{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)] | x, u\} + \alpha r = H(x, u, J) + \alpha r \end{aligned}$$

при всех $r > 0$ и $J \in F$ с $J_0 \leq J$. Следовательно, предположение 1.2 выполнено, как утверждалось. При условии (47) из лемм A.2 и A.3 (в) следует, что

$$H(x, u, J-r) = H(x, u, J) - \alpha r$$

для всех $r > 0$ и $J \in F$ с $J \leq J_0$, так что и предположение D.2 выполнено. $\square$

Таким образом, все результаты предыдущих разделов применимы к задачам стохастического оптимального управления с аддитивными функционалами издержек. На самом деле при дополнительных предположениях о счетности можно использовать аддитивную структуру этих задач для получения результатов о существовании оптимальных или почти оптимальных стратегий в предположении D. Эти результаты приводятся в следующем предложении. Доказательство утверждения (а) можно найти у Блекуэлла [18]. Доказательство утверждений (б) и (в) можно найти у Орнштейна [63] и Фрида [4].

Предложение 5.13. *Рассмотрим отображение*

$$H(x, u, J) = E\{g(x, u, w) + J[f(x, u, w)] | x, u\}$$

из п. 2.3.2. (множество W счетно), и пусть $J_0(x) = 0$ для всех $x \in S$. Предположим, что множество S также счетно, $J^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$

и что функция g удовлетворяет условию

$$b \leq g(x, u, w) \leq 0 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W,$$

где $b \in (-\infty, 0)$ — некоторая постоянная. Тогда:

(а) если для любого $x \in S$ существует стратегия, оптимальная в точке x , то существует стационарная оптимальная стратегия;

(б) для любого числа $\epsilon > 0$ существует функция $\mu_\epsilon \in M$ такая, что

$$J_{\mu_\epsilon}(x) \leq (1 - \epsilon) J^*(x) \quad \forall x \in S;$$

(в) если существует число $\beta \in (-\infty, 0)$ такое, что $\beta \leq J^*(x)$ для всех $x \in S$, то для любого числа $\epsilon > 0$ существует стационарная ϵ -оптимальная стратегия, т.е. существует функция $\mu_\epsilon \in M$ такая, что

$$J^* \leq J_{\mu_\epsilon} \leq J^* + \epsilon.$$

Заметим, что, как показывает пример, построенный Блекуэллом [18], утверждение (а) перестает быть верным, когда $J^*(x) = -\infty$ для некоторого $x \in S$, даже если множество S конечно. Как показывает контрпример, принадлежащий Орнштейну [63], утверждения (б) и (в) также могут быть неверны, если множество S несчетно.

Как показывает контрпример Блекуэлла [16], утверждение (в) может не выполняться, если функция J^* не ограничена снизу. Заметим также, что результаты предложения 5.13 могут быть значительно усилены в частном случае задачи детерминированного оптимального управления (см. п. 2.3.1). Эти результаты приведены у Бертсекаса и Шрива [14].

Стохастическое оптимальное управление — мультипликативный функционал издержек

Предложение 5.14. Рассмотрим отображение

$$H(x, u, J) = E\{g(x, u, w) J[f(x, u, w)] | x, u\}$$

из п. 2.3.4 и положим $J_0(x) = 1$ для $x \in S$.

(а) Если существует число $b \in R$ такое, что

$$1 \leq g(x, u, w) \leq b \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W,$$

то предположения 1, 1.1 и 1.2 выполнены при значении скаляра из 1.2, равном b ;

(б) если

$$0 \leq g(x, u, w) \leq 1 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W,$$

то предположения D, D.1 и D.2 выполнены при значении скаляра в D.2, равном единице.

Доказательство. Это легко следует из предположений и теоремы о монотонном предельном переходе под знаком обыкновенного интеграла. $\square$

Минимаксное управление

Предложение 5.15. Рассмотрим отображение

$$H(x, u, J) = \sup_{w \in W(x, u)} \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)]\}$$

из п. 2.3.5 и положим $J_0(x) = 0$ для всех $x \in S$.

(а) Если

$$0 \leq g(x, u, w) \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W,$$

то предположения 1, 1.1 и 1.2 выполнены при значении скаляра в 1.2, равном α ;

(б) если

$$g(x, u, w) \leq 0 \quad \forall x \in S, \quad u \in U(x), \quad w \in W,$$

то предположения D и D.2 выполнены при значении скаляра в D.2, равном α .

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 5.12. $\square$

Глава 6

ОБОБЩЕННАЯ АБСТРАКТНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Как было отмечено в п. 2.3.2, анализ задач стохастического управления, в которых пространство W изменения стохастического параметра несчетно, связано с определенными трудностями. По этой причине в модели из п. 2.3.3 мы обратились к внешнему интегралу. Альтернативный вариант, рассматриваемый в данной главе, заключается в таком изменении исходной конструкции, чтобы стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ состояли из функций μ_k , принадлежащих некоторому собственному подмножеству множества M , например были измеримы в подходящем смысле. Этот подход тесно связан с подходом, применяемым в части II. К сожалению, многие из полученных выше результатов и, в частности, результаты главы 5 не могут быть доказаны в рамках обобщенной схемы, которую мы предложим. Однако в этой схеме получают удовлетворительную трактовку модели с конечным горизонтом и модели с бесконечным горизонтом в предположении сжимаемости. Некоторые результаты главы 5, полученные в предположении D, найдут себе аналоги в рамках обобщенной схемы. Последующее обсуждение поможет читателю распознать эти результаты.

Определенные аспекты схемы, рассматриваемой в этой главе, могут показаться читателю несколько искусственными. Предлагаемый подход мотивирован в первую очередь идеями, развитыми в части II, и при желании читатель может вернуться к данной главе после ознакомления с частью II.

Результаты следующих разделов этой главы применяются к задаче стохастического оптимального управления с мультипликативным функционалом издержек в разделе 11.3. Приведенные там рассуждения наглядно иллюстрируют идеи, лежащие в основе конструкций данной главы.

6.1. Общие замечания и предположения

Рассмотрим множества S , C , $U(x)$, M , Π и F , введенные в разделе 2.1. Кроме того, рассмотрим два подмножества F^* и $\tilde{F}$ множества F , действительных в расширенном смысле функций на S , удовлетворяющие включениям $F^* \subset \tilde{F} \subset F$, а также подмножество $\tilde{M}$ множества M функций $\mu: S \rightarrow C$,

удовлетворяющих условию: $\mu(x) \in U(x)$ для всех $x \in S$. Подмножество стратегий из Π , соответствующих $\tilde{M}$, обозначается через $\tilde{\Pi}$, т.е.

$$\tilde{\Pi} = \{(\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi \mid \mu_k \in \tilde{M}, k = 0, 1, \dots\}.$$

Вместо отображения H из раздела 2.1 рассмотрим отображение $H: SC\tilde{F} \rightarrow R^*$, удовлетворяющее для любых состояний $x \in S$, управлений $u \in U(x)$ и функций $J, J' \in \tilde{F}$ предположению монотонности

$$H(x, u, J) \leq H(x, u, J'), \text{ если } J \leq J'.$$

Таким образом, отображение H в данной главе имеет ту же природу, что и отображение из глав 2—5. Единственное отличие состоит в том, что отображение H определено на множестве $SC\tilde{F}$, а не на SCF . Следовательно, если подмножество $\tilde{F}$ состоит из измеримых в нужном смысле функций и отображение H соответствует задаче стохастического оптимального управления, такой же, как в п. 2.3.3 (с измеримой функцией g), то H может быть определено в терминах обычного, а не внешнего интеграла.

Для функции $\mu \in \tilde{M}$ рассмотрим оператор $T_\mu: \tilde{F} \rightarrow F$, определяемый формулой

$$T_\mu(J)(x) = H(x, \mu(x), J) \quad \forall x \in S.$$

Рассмотрим также оператор $T: \tilde{F} \rightarrow F$, определяемый формулой

$$T(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J) \quad \forall x \in S.$$

Пусть задана функция $J_0: S \rightarrow R^*$, удовлетворяющая условиям $J_0 \in F^*$, $J_0(x) > -\infty \quad \forall x \in S$, и требуется решить задачу с горизонтом N :

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } J_N, \pi(x) = (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \\ &\text{при условии } \pi \in \tilde{\Pi} \end{aligned} \quad (1)$$

или ее аналог с бесконечным горизонтом:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } J_\pi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x) \\ &\text{при условии } \pi \in \tilde{\Pi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем использовать обозначения

$$J_N^* = \inf_{\pi \in \tilde{\Pi}} J_N, \pi, \quad J^* = \inf_{\pi \in \tilde{\Pi}} J_\pi$$

и терминологию главы 2, относящуюся к оптимальным, ϵ -оптимальным и стационарным стратегиям, а также к последовательностям стратегий, обладающим $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности.

В каждом результате этой главы будет делаться одно из следующих предположений о множествах F^* , $\tilde{F}$ и $\tilde{M}$.

A.1. Для любых состояний $x \in S$ и управления $u \in U(x)$ существует функция $\mu \in \tilde{M}$ такая, что $\mu(x) = u$. (Это, в частности, означает, что для любых $J \in \tilde{F}$ и $x \in S$ справедливо равенство

$$T(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J) = \inf_{\mu \in \tilde{M}} H(x, \mu(x), J).$$

A.2. Для всех функций $J \in F^*$ и любого числа $r \in R$ имеем $T(J) \in F^*$, $(J+r) \in F^*$.

А.3. Для всех функций $J \in \tilde{F}$, $\mu \in \tilde{M}$ и любого числа $r \in R$ имеем $T_\mu(J) \in \tilde{F}$, $(J+r) \in \tilde{F}$.

А.4. Для любой функции $J \in F^*$ и любого числа $\epsilon > 0$ существует функция $\mu_\epsilon \in \tilde{M}$ такая, что для всех состояний $x \in S$

$$T_{\mu_\epsilon}(J)(x) \leq \begin{cases} T(J)(x) + \epsilon, & T(J)(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & T(J)(x) = -\infty. \end{cases}$$

Кроме того, в разделе 6.3 будет использоваться следующее предположение.

А.5. Для любой последовательности $\{J_k\} \subset \tilde{F}$, которая сходится поточечно, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k \in \tilde{F}$. Если к тому же $\{J_k\} \subset F^*$, то и $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k \in F^*$. Заметим, что в частном случае, когда $F^* = \tilde{F} = F$ и $\tilde{M} = M$, мы приходим к схеме из глав 2–5, и все перечисленные выше предположения выполнены. Таким образом, в этой главе рассматривается некоторое обобщение схемы из глав 2–5.

Приведем теперь некоторые примеры множеств F^* , $\tilde{F}$ и $\tilde{M}$, которые полезны в связи с отображением

$$H(x, u, J) = \int^* \{g(x, u, w) + \alpha J[f(x, u, w)]\} p(dw | x, u),$$

рассматриваемым к задаче стохастического оптимального управления из раздела 2.3.3. Положим $J_0(x) = 0$ для всех $x \in S$. Используемая терминология объясняется в главе 7.

П р и м е р 1. Пусть множества S , C и W — борелевские пространства, F — борелевская σ -алгебра в W , f — измеримая по Борелю функция, отображающая множество SCW в S , g — полуаналитическая снизу функция, отображающая SCW в R^* , $p(dw | x, u)$ — измеримое по Борелю стохастическое ядро на W при условии SC , α — положительное число. Пусть множество

$$\Gamma = \{(x, u) \in SC | x \in S, u \in U(x)\}$$

является аналитическим. Примем за F^* множество полуаналитических снизу функций на S со значениями из $[-\infty, \infty]$, за $\tilde{F}$ — множество универсально измеримых функций на S со значениями из $[-\infty, \infty]$, а за $\tilde{M}$ — множество универсально измеримых отображений из S в C с графиком, принадлежащим Γ (т.е. $\mu \in \tilde{M}$, если μ универсально измерима и $(x, \mu(x)) \in \Gamma$ для всех $x \in S$). Этот пример обсуждается в главах 8 и 9.

П р и м е р 2. Этот пример аналогичен примеру 1, за исключением того, что $\tilde{M}$ является множеством всех аналитически измеримых отображений из S в C с графиками в Γ . Этот пример рассматривается в разделе 11.2.

П р и м е р 3. Этот пример также аналогичен примеру 1, за исключением того, что $p(dw | x, u)$ и f — непрерывные функции, g — действительная полунепрерывная сверху и ограниченная сверху функция, Γ — открытое множество из SC , $\tilde{F}$ — множество ограниченных сверху измеримых по Борелю функций на S со значениями из $[-\infty, \infty]$, F^* — множество ограниченных сверху полунепрерывных снизу функций на S со значениями из $[-\infty, \infty]$, а $\tilde{M}$ — множество измеримых по Борелю отображений из S в C с графиками в Γ . Это — полунепрерывная сверху модель из определения 8.8.

П р и м е р 4. Этот пример аналогичен примеру 3, за исключением того, что C является, кроме всего прочего, компактным множеством, g — действительная полунепрерывная снизу и ограниченная снизу функция,

Γ — замкнутое подмножество в SC , $\tilde{F}$ — множество ограниченных снизу измеримых по Борелю функций на S со значениями из $[-\infty, \infty]$, F^* — множество ограниченных снизу и полунепрерывных снизу функций на S со значениями из $[-\infty, \infty]$. Этот пример является частным случаем полунепрерывной снизу модели из определения 8.7.

Все эти примеры удовлетворяют сформулированным выше предположениям А.1 — А.4 (см. также разделы 7.5 и 7.7). Первые два примера удовлетворяют также и предположению А.5.

6.2. Анализ моделей с конечным горизонтом

Достаточно полный анализ задачи с конечным горизонтом (1) получается за счет простых видоизменений предположений и доказательств из главы 3. Вначале модифицируем соответствующим образом некоторые предположения из раздела 3.1.

Предположение $\tilde{F}.2$. Это предположение совпадает с предположением $F.2$ раздела 3.1, за исключением того, что множество F заменяется на $\tilde{F}$.

Предположение $\tilde{F}.3$. Это предположение совпадает с предположением $F.3$ раздела 3.1, за исключением того, что теперь мы требуем $J \in F^*$, $\{J_n\} \in \tilde{F}$ и $\{\mu_n\} \in \tilde{M}$ вместо $J \in F$, $\{J_n\} \subset F$ и $\{\mu_n\} \in M$.

Легко увидеть, что в примерах 1—4 предыдущего раздела предположение $\tilde{F}.2$ выполняется. Можно также показать (см. доказательство предложения 8.4), что предположение $F.3$ выполняется в примере 1, где используются универсально измеримые стратегии.

Повторяя почти дословно доказательства предложений 3.1 (б) и 3.2, получим следующий результат.

Предложение 6.1.

(а) Пусть выполнены предположения А.1—А.4 и $\tilde{F}.2$, и пусть $J_k^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$ и $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$, и для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная при горизонте N стратегия, т.е. такая стратегия $\pi_\epsilon \in \tilde{\Pi}$, что

$$J_N^* \leq J_{N, \pi_\epsilon} \leq J_N^* + \epsilon.$$

(б) Пусть выполнены предположения А.1 — А.4 и $\tilde{F}.3$, и пусть $J_{k, \pi}(x) < \infty$ для всех $x \in S$, $\pi \in \tilde{\Pi}$ и $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$. Более того, для любой заданной последовательности $\{\epsilon_n\}$ такой, что $\epsilon_n \downarrow 0$, $\epsilon_n > 0$ для всех n , существует последовательность стратегий, $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемо сходящаяся к оптимальности. В частности, если к тому же $J_N^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$, то для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная стратегия.

Аналогична, модифицируя доказательство предложения 3.3 и следствия 3.3.1 (б), получаем следующий результат.

Предложение 6.2. Пусть выполнены предположения А.1 — А.4.

(а) Стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \dots) \in \tilde{\Pi}$ равномерно оптимальна при горизонте N тогда и только тогда, когда $(T_{\mu_k^*}^{N-k-1})(J_0) = T^{N-k}(J_0)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

(б) Если существует равномерно оптимальная при горизонте N стратегия, то $J_N^* = T^N(J_0)$.

Результаты, аналогичные следствию 3.3.1 (а) и предложению 3.4, могут быть получены в том случае, если множество $\tilde{M}$ богатое, так что выполняется следующее предположение.

Предположение о точном выборе. Для любой функции $J \in F^*$, если инфимум равен

$$T(J) = \inf_{u \in U(x)} H(x, u, J)$$

достигается при любом $x \in S$, то существует функция $\mu^* \in \tilde{M}$ такая, что $T_{\mu^*}(J) = T(J)$.

В примерах 1 — 4 из предыдущего раздела предположение о точном выборе выполняется (см. предложения 7.50 и 7.33). Следующее предположение доказывается так же, как следствие 3.3.1 (а) и предложение 3.4.

Предложение 6.3. Пусть выполнены предположения A.1 — A.4 и предположение о точном выборе.

(а) Равномерно оптимальная при горизонте N стратегия существует тогда и только тогда, когда инфимум в соотношении

$$T^{k+1}(J_0)(x) = \inf_{u \in U(x)} H[x, u, T^k(J_0)]$$

достигается при любых $x \in S$ и $k = 0, 1, \dots, N-1$.

(б) Пусть пространство управлений S является хаусдорфовым пространством, и пусть множество

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in U(x) \mid H[x, u, T^k(J_0)] \leq \lambda\}$$

компактно при любых $x \in S, \lambda \in R$ и $k = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда $J_N^* = T^N(J_0)$ и существует равномерно оптимальная при горизонте N стратегия.

6.3. Анализ моделей с бесконечным горизонтом в предположении сжимаемости

Рассмотрим следующий модифицированный вариант предположения С из раздела 4.1.

Предположение $\tilde{C}$. Существует замкнутое подмножество $\bar{B}$ пространства B такое, что:

- (а) $J_0 \in \bar{B} \cap F^*$;
- (б) для всех функций $J \in \bar{B} \cap F^*$ функция $T(J)$ принадлежит $\bar{B} \cap F^*$;
- (в) для всех функций $J \in \bar{B} \cap \tilde{F}$ и $\mu \in \tilde{M}$ функция $T_\mu(J)$ принадлежит $\bar{B} \cap \tilde{F}$.

Кроме того, для любой стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \tilde{\Pi}$ предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0)(x)$$

существует и конечен при любом $x \in S$. Сверх того, существует натуральное число m и числа ρ и α , удовлетворяющие неравенствам $0 < \rho < 1, 0 < \alpha$, такие, что

$$\|T_\mu(J) - T_\mu(J')\| \leq \alpha \|J - J'\| \quad \forall \mu \in \tilde{M}, J, J' \in \bar{B} \cap \tilde{F},$$

$$\|(T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{m-1}})(J) - (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{m-1}})(J')\| \leq \rho \|J - J'\|$$

$$\forall \mu_0, \dots, \mu_{m-1} \in \tilde{M}, \quad J, J' \in \bar{B} \cap \tilde{F}.$$

В предположениях A.1 — A.4 и $\tilde{C}$ почти все результаты главы 3 имеют аналоги в рамках нашей обобщенной схемы. Ключевым является тот факт, что из замкнутости множеств $\tilde{F}$ и F^* относительно поточечного предельного перехода (предположение A.5) следует, что $\bar{B} \cap \tilde{F}, \bar{B} \cap F^*, \bar{B} \cap F^*$ — замкнутые подмножества в B . Справедливость этого ут-

верждения следует из того, что сходимость последовательности в B (т.е. равномерная сходимость) влечет за собой поточечную сходимость. Поэтому точно так же, как и в главе 3, можно применить теорему о неподвижной точке сжимающего оператора для того, чтобы установить, что для любой функции $\mu \in \tilde{M}$ функция J_μ является единственной неподвижной точкой оператора T_μ в $\bar{B} \cap \tilde{F}$, а функция J^* — единственной неподвижной точкой оператора T в $\bar{B} \cap F^*$. Только модифицированный алгоритм итерации стратегий и связанное с ним предложение 4.9 не имеют аналогов в рассматриваемых рамках. Причина заключается в том, что наши предположения не гарантируют осуществимость шага 3 в алгоритме итерации стратегий.

Вместо того чтобы перечислять аналоги всех результатов главы 4, сформулируем выборочно и без доказательства некоторые основные результаты, которые могут быть получены в рамках расширенной схемы.

Предложение 6.4. Пусть выполнены предположения A.1 — A.4 и $\tilde{C}$.

(а) функция J^* принадлежит $\bar{B} \cap F^*$ и является единственной неподвижной точкой оператора T в $\bar{B} \cap F^*$. Далее, если функция $J' \in \bar{B} \cap F^*$ такова, что $T(J') \leq J'$, то $J^* \leq J'$, тогда как, если $J' \leq T(J')$, то $J' \leq J^*$.

(б) Для любой функции $\mu \in \tilde{M}$ функция J_μ принадлежит $\bar{B} \cap \tilde{F}$ и является единственной неподвижной точкой оператора T_μ в $\bar{B} \cap \tilde{F}$.

(в) Справедливы соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T^N(J) - J^*\| = 0 \quad \forall J \in \bar{B} \cap F^*,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|T_\mu^N(J) - J_\mu\| = 0 \quad \forall J \in \bar{B} \cap \tilde{F}, \quad \mu \in \tilde{M}.$$

(г) Стационарная стратегия $\pi^* = (\mu^*, \mu^*, \dots) \in \tilde{\Pi}$ оптимальна тогда и только тогда, когда $T_{\mu^*}(J^*) = T(J^*)$. Эквивалентное утверждение: стратегия π^* оптимальна тогда и только тогда, когда $J_{\mu^*} \in \bar{B} \cap F^*$ и $T_{\mu^*}(J_{\mu^*}) = T(J_{\mu^*})$.

(д) Для любого числа $\epsilon > 0$ существует стационарная ϵ -оптимальная стратегия, т.е. такая стратегия $\pi_\epsilon = (\mu_\epsilon, \mu_\epsilon, \dots)$, что $\|J^* - J_{\mu_\epsilon}\| \leq \epsilon$.

Предложение 6.5. Пусть выполнены предположения A.1 — A.5 и $\tilde{C}$. Предположим далее, что выполняется предположение о точном выборе из предыдущего раздела.

(а) Если для любого $x \in S$ существует стратегия, которая оптимальна при данном x , то существует оптимальная стационарная стратегия.

(б) Пусть S является хаусдорфовым пространством. Если для некоторой функции $J \in \bar{B} \cap F^*$ и некоторого положительного числа $\bar{k}$ множество

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in U(x) \mid H[x, u, T^k(J)] \leq \lambda\}$$

компактно при всех $x \in S$, $\lambda \in R$ и $k \geq \bar{k}$, то существует оптимальная стационарная стратегия.

Глава 7

БОРЕЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕРЫ НА НИХ

В этой главе представлен математический аппарат, необходимый для анализа моделей динамического программирования, рассматриваемых в последующих главах. Основным при этом является понятие борелевского пространства, которое изучается в разделе 7.3 с помощью топологических конструкций, излагаемых в разделе 7.2. В разделе 7.4 показывается, что множество вероятностных мер на борелевском пространстве само является борелевским пространством, и используются соотношения между этими двумя пространствами. Предлагаемый в книге общий подход к динамическому программированию опирается на свойства аналитических множеств, рассматриваемых в разделе 7.6 и которые используются в разделе 7.7 для определения и исследования свойств полуаналитических снизу функций. Эти функции возникают в процессе реализации алгоритма динамического программирования, когда для построения оптимальных или почти оптимальных стратегий необходимо осуществить измеримый выбор в точках их инфимума или вблизи них. Для облегчения понимания аналогичные построения делаются сначала для более частного случая в разделе 7.5.

Содержание этой главы рассчитано на читателя, знакомого с основными понятиями топологии и теории меры, за исключением специальных результатов, относящихся к сепарабельным метрическим пространствам и вероятностным мерам на их борелевских σ -алгебрах.

7.1. Обозначения

Для удобства приводим здесь большинство обозначений, используемых в части II.

Операции над множествами

Пусть A и B являются подмножествами пространства X .

Дополнение множества A в пространстве X обозначается через A^c .

Теоретико-множественная разность $A - B$ определяется как $A \cap B^c$.

Вместо A^c будем иногда писать $X - A$.

Симметрическая разность $A \Delta B$ представляет собой множество $(A - B) \cup (B - A)$.

Если X является топологическим пространством, то $\bar{A}$ будет обозначать замыкание множества A .

Если задана последовательность множеств $A_1, A_2, \dots$ такая, что $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то будем писать $A_n \uparrow A$. Если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, то будем писать $A_n \downarrow A$.

Если $X_1, X_2, \dots$ — последовательность пространств, то *декартовы произведения* пространств $X_1, X_2, \dots, X_n$ и $X_1, X_2, \dots$ обозначаются соответственно через $X_1 X_2 \dots X_n$ и $X_1 X_2 \dots$. Если данные пространства имеют топологии, то получающееся в результате пространство будет иметь топологию произведения. В этой топологии сходимость в произведении пространств означает покомпонентную сходимость в каждом пространстве.

Если в данных пространствах имеются σ -алгебры $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots$, то произведения σ -алгебр обозначаются соответственно через $F_{X_1} F_{X_2} \dots F_{X_n}$ и $F_{X_1} F_{X_2} \dots$.

Если X и Y — произвольные пространства и множество $E \subset XY$, то для каждого элемента $x \in X$ x -сечение множества E представляет собой множество

$$E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}. \quad (1)$$

Если P является системой подмножеств пространства X , то через $\sigma(P)$ обозначается наименьшая σ -алгебра, содержащая P . Через P_σ или P_δ обозначается множество всех подмножеств, которые могут быть получены посредством объединения или соответственно пересечения счетного числа множеств системы P .

Если F является совокупностью замкнутых подмножеств топологического пространства X , то $F_\sigma = F$, а элементы системы F_σ называются F_σ -множествами пространства X .

Если G является совокупностью открытых подмножеств пространства X , то элементы системы G_δ называются G_δ -множествами пространства X .

Если (X, P) — *пространство с покрытием**¹⁾, т.е. P представляет собой непустое семейство подмножеств пространства X , и S является таблицей Суслина для семейства P (см. определение 7.15), то множество $N(S)$ обозначает ядро таблицы S . Совокупность всех ядер таблиц Суслина для семейства P обозначается через $S(P)$.

Специальные множества

Символом R обозначается множество действительных чисел с обычной топологией. Будем использовать символ R^* для обозначения *расширенного множества действительных чисел* $[-\infty, +\infty]$ с топологией, описанной вслед за определением 7.7 из раздела 7.3. Аналогично Q обозначает *множество рациональных чисел*, а Q^* — *расширенное множество рациональных чисел*, т.е. множество $Q \cup \{\pm\infty\}$.

Если имеются множества X, Y и отображение $f: X \rightarrow Y$, то *графиком отображения f* называется множество

$$\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}. \quad (2)$$

Если множество $A \subset X$, а C — некоторая совокупность подмножеств множества X , то полагаем $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ и

$$f(C) = \{f(C) \mid C \in C\}. \quad (3)$$

Если множество $B \subset Y$, а C — совокупность подмножеств множества Y , то полагаем $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ и

$$f^{-1}(C) = \{f^{-1}(C) \mid C \in C\}. \quad (4)$$

¹⁾ В оригинале "paved space", буквально — "замошенное пространство". Мы сочли более удобным перевести этот термин как "пространство с покрытием", однако следует учитывать, что в данном случае понятие "покрытие" отличается от общепринятого в том смысле, что P не обязательно покрывает все X (см. определение 7.14). (Прим. перев.)

Если X является топологическим пространством, то F_X — семейство замкнутых подмножеств множества X , а B_X — борелевская σ -алгебра в пространстве X (см. определение 7.6).

Пространство вероятностных мер на пространстве (X, B_X) обозначается через $P(X)$; $C(X)$ — банахово пространство ограниченных действительных непрерывных функций на X с нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

для любой метрики d на множестве X , которая согласована с его топологией;

$U_d(X)$ — пространство ограниченных действительных функций на множестве X , являющихся равномерно непрерывными относительно метрики d .

Если X — борелевское пространство (определение 7.7), то A_X обозначает его аналитическую σ -алгебру (определение 7.19), а U_X — универсальную σ -алгебру (определение 7.18).

Пусть N обозначает множество натуральных чисел с дискретной топологией.

Бэровское нулевое пространство N представляет собой счетное произведение множеств N .

Кубом Гильберта N называется счетное произведение множеств $[0, 1]$.

Будем обозначать символом Σ семейство всех конечных последовательностей натуральных чисел. На множестве Σ не вводится никакой топологии. Если $s \in \Sigma$ и $z = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in N$, то запись $s < z$ будет обозначать, что $s = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ для некоторого k .

Отображения

Если X и Y — некоторые пространства, то proj_X обозначает проекцию из пространства XY на пространство X .

Если E — подмножество пространства X , то индикатор множества E определяется соотношением

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases} \quad (5)$$

Если задана функция $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, то положительная и отрицательная части функции f определяются как

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\}, \quad (6)$$

$$f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}. \quad (7)$$

Если задана последовательность функций $f_n: X \rightarrow Y$, где Y — топологическое пространство, и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, то будем писать $f_n \rightarrow f$. Если к тому же $Y = [-\infty, +\infty]$ и $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ для всех $x \in X$, то будем писать $f_n \uparrow f$, а если $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots$ для всех $x \in X$, то будем писать $f_n \downarrow f$. Обычно, когда аргументы функций, принимающих значение из $[-\infty, +\infty]$, опущены, все выражения должны интерпретироваться поточечно. Например, $(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x)$ для всех $x \in X$; $f_1 \leq f_2$ тогда и только тогда, когда $f_1(x) \leq f_2(x)$ для всех $x \in X$, а $f + \epsilon$ представляет собой функцию $(f + \epsilon)(x) = f(x) + \epsilon$ для всех $x \in X$.

Если (X, d) — непустое метрическое пространство, $x \in X$, а Y — непустое подмножество пространства X , то *расстояние между точкой x и множеством Y* определяется формулой

$$d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y). \quad (8)$$

Диаметр множества Y равен

$$\text{diam}(Y) = \sup_{x, y \in Y} d(x, y) \quad (9)$$

Если (X, F) — измеримое пространство, и F содержит все одноточечные множества, то будем обозначать через p_x вероятностную меру на пространстве (X, F) , которая приписывает единичную массу множеству $\{x\}$, $x \in X$.

7.2. Метризуемые пространства

Определение 7.1. Пусть (X, T) — топологическое пространство. Метрика d в множестве *согласована* с топологией T , если каждое множество вида $\{y \in X \mid d(x, y) < c\}$, $x \in X$, $c > 0$ принадлежит T , а каждое непустое множество из T представляет собой объединение множеств такого вида. Пространство (X, T) *метризуемо*, если такая метрика существует.

Единственное различие между метрическим и метризуемым пространствами состоит в следующем: в метрическом пространстве уже выбрана метрика, в то время как в метризуемом пространстве метрика еще не фиксирована. Если существует хотя бы одна метрика, согласованная с данной топологией, то можно найти много таких метрик. Например, если d есть метрика в множестве X , согласованная с топологией T , то метрика ρ , определенная формулой

$$\rho(x, y) = d(x, y) / [1 + d(x, y)] \quad \forall x, y \in X$$

также согласована с топологией T . В последующем, для краткости, при обозначении метризуемых пространств будем писать X вместо (X, T) .

Если (X, T) — топологическое пространство и множество $Y \subset X$, то будем понимать под Y (если специально не оговорено иначе) топологическое пространство с открытыми множествами $G \cap Y$, где множество G пробегает T . Такая топология называется *индуцированной топологией*.

Если (Z, S) — некоторое другое топологическое пространство и отображение $\varphi: Z \rightarrow X$ однозначно и непрерывно, а φ^{-1} непрерывно на множестве $\varphi(Z)$ с индуцированной топологией, то будем говорить, что φ является *гомеоморфизмом*, а множество Z *гомеоморфно* множеству $\varphi(Z)$. Если существует гомеоморфизм из множества Z в множество X , то будем говорить, что множество Z может быть *гомеоморфно вложено* в X .

Если заданы метрика d в пространстве X , согласованная с его топологией, и гомеоморфизм $\varphi: Z \rightarrow X$, определенный выше, то можно определить метрику d_1 в множестве Z посредством соотношения

$$d_1(z_1, z_2) = d(\varphi(z_1), \varphi(z_2)). \quad (10)$$

Можно установить, что метрика d_1 согласована с топологией S . Это означает, что любое топологическое пространство, гомеоморфное метризуемому пространству (или подмножеству метризуемого пространства), само метризуемо.

Нас будут интересовать метризуемые пространства и их борелевские σ -алгебры. Наличие метрики в таких пространствах позволяет просто установить ряд результатов, доказательство которых для более общих топологических пространств очень громоздко или даже невозможно. Приведем два таких результата в качестве лемм, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 7.1 (лемма Урысона). Пусть X — метризуемое пространство и A и B — непересекающиеся непустые замкнутые подмножества пространства X . Тогда существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$ такая, что $f(a) = 0$ для каждого $a \in A$, $f(b) = 1$ для каждого $b \in B$, и $0 < f(x) < 1$ для каждого $x \notin A \cup B$. Если метрика d согласована с топологией в пространстве X и $\inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) > 0$, то можно выбрать функцию f равномерно непрерывной относительно метрики d .

Доказательство. Пусть d — метрика в пространстве X , согласованная с его топологией. Определим функцию f формулой

$$f(x) = d(x, A) / [d(x, A) + d(x, B)],$$

где расстояние от точки до непустого замкнутого множества определяется формулой (8). Это расстояние равно нулю тогда и только тогда, когда точка принадлежит множеству, и отображение (8) удовлетворяет условию Липшица согласно соотношению (6) из приложения В. Функция f обладает всеми требуемыми свойствами. Если $\inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) > 0$, то сумма $d(x, A) + d(x, B)$ также ограничена от нуля, откуда следует равномерная непрерывность функции f . $\square$

Лемма 7.2. Пусть X — метризуемое пространство. Каждое замкнутое подмножество пространства X является G_δ -множеством, а каждое открытое подмножество пространства X является F_σ -множеством.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе получается из первого переходом к дополнениям. Пусть множество F замкнуто. Можно считать, не ограничивая общности, что F не пусто. Пусть d является метрикой в пространстве X , согласованной с его топологией. Непрерывность функции $x \rightarrow d(x, F)$ означает, что множество

$$G_n = \{x \in X \mid d(x, F) < 1/n\}$$

открыто. Но $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. $\square$

Определение 7.2. Пусть X — метризуемое топологическое пространство. Пространство X является *сепарабельным*, если в нем найдется счетное всюду плотное множество.

Легко проверить, что всякое подпространство сепарабельного метризуемого пространства сепарабельно и метризуемо. Набор подмножеств топологического пространства (X, T) является *базой* топологии, если любое открытое множество может быть представлено как объединение множеств из этого набора. Если база может быть получена как совокупность конечных пересечений множеств из какого-то другого набора, то последний называется *подбазой*. Если топология T имеет счетную базу, то говорят, что пространство (X, T) удовлетворяет *второй аксиоме счетности*. Топологическое пространство является *пространством Линделефа*, если каждое семейство открытых множеств, покрывающее пространство, содержит счетное подсемейство, которое также покрывает пространство. Хорошо известно, что для метризуемых пространств свойство делимости, вторая аксиома счетности и свойство Линделефа эквивалентны. Следующий результат является прямым следствием этого факта.

Предложение 7.1. Пусть (X, T) — сепарабельное метризуемое топологическое пространство и V является базой топологии T . Тогда база V содержит счетное подсемейство V_0 , которое также является базой топологии T .

Доказательство. Пусть C — счетная база топологии T . Каждое множество $C \in C$ имеет вид $C = \bigcup_{\alpha \in I(C)} B_\alpha$, где $I(C)$ — множество индексов, и $B_\alpha \in B$ для каждого индекса $\alpha \in I(C)$. Так как множество C является множеством Линделефа, то можно считать, что множество $I(C)$ счетно. Остается положить $B_0 = \bigcup_{C \in C} \{B_\alpha \mid \alpha \in I(C)\}$. $\square$

Гильбертов куб H представляет собой произведение счетного числа единичных интервалов (с топологией произведения). Единичный интервал является сепарабельным и метризуемым пространством, и, как будет показано позднее (предложение 7.4), эти же свойства выполняются для гильбертова куба. Как показывает следующее утверждение, H является в известном смысле каноническим сепарабельным метризуемым пространством.

Предложение 7.2 (теорема Урысона). Любое сепарабельное метризуемое пространство гомеоморфно подмножеству гильбертова куба H .

Доказательство. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство со счетным всюду плотным множеством $\{x_k\}$. Определим функции

$$\varphi_k(x) = \min \{1, d(x, x_k)\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и отображение $\varphi: X \rightarrow H$, полагая $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots)$. Каждая функция φ_k непрерывна, поэтому отображение φ тоже непрерывно. (Сходимость в H есть покомпонентная сходимость.) Если выполняется равенство $\varphi(x) = \varphi(y)$, то, полагая $x_{k_j} \rightarrow x$, получаем, что $\lim_{j \rightarrow \infty} d(y, x_{k_j}) = 0$, так что $x = y$ и отображение φ является взаимно однозначным. Остается показать, что отображение φ^{-1} непрерывно, т.е. что из $\varphi(y_n) \rightarrow \varphi(y)$ следует $y_n \rightarrow y$. Но если $\varphi(y_n) \rightarrow \varphi(y)$, то можно выбрать число $\epsilon > 0$ и точку x_k такие, что $d(y, x_k) < \epsilon$. Так как $d(y_n, x_k) \rightarrow d(y, x_k)$ при $n \rightarrow \infty$, то для достаточно больших n выполняется неравенство $d(y_n, x_k) < \epsilon$. Тогда $d(y, y_n) < 2\epsilon$. $\square$

Если X — сепарабельное метризуемое пространство и отображение $\varphi: X \rightarrow H$ является гомеоморфизмом, существование которого гарантируется предложением 7.2, то, отождествляя $x \in X$ с $\varphi(x) \in H$, можно рассматривать X как подмножество H . Действительно, можно считать X топологическим подпространством пространства H , так как образы открытых множеств из X при отображении φ являются как раз открытыми подмножествами пространства $\varphi(X) \subset H$ в индуцированной топологии. Заметим, впрочем, что хотя пространство X само по себе одновременно и открыто и замкнуто, множество $\varphi(X)$ может не быть ни открытым, ни замкнутым в пространстве H . На самом деле у него может не быть никаких характерных топологических свойств. Аналогично, множество со специальной структурой в пространстве X , скажем множество типа G_δ , может не иметь этой структуры, когда оно рассматривается как подмножество пространства H . Следующие определение и предложение проливают некоторый свет на это обстоятельство.

Определение 7.3. Пусть X — топологическое пространство. Пространство X называется *топологически полным*, если в X существует метрика d , согласованная с его топологией, такая, что метрическое пространство (X, d) полное, т.е. если последовательность $\{x_k\} \subset X$ является последовательностью Коши в метрике d [$d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$], то последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому элементу из пространства X .

Предложение 7.3 (теорема Александрова). Пусть X — топологически полное пространство, Z — метризуемое пространство и задан гомеоморфизм $\varphi: X \rightarrow Z$. Тогда множество $\varphi(X)$ является G_δ -множеством в про-

странстве Z . И наоборот, если Y является G_δ -множеством в пространстве Z и Z топологически полное пространство, то множество Y тоже топологически полное.

Доказательство. При доказательстве первой части предложения будем считать пространство X подмножеством пространства Z . Необходимо рассмотреть две метрики: метрику d в пространстве X , согласованную с его топологией, и метрику d_1 в пространстве X , которая делает его полным. Определим множество

$$U_n = \{z \in Z \mid d(z, \bar{X}) < 1/n \text{ и } \exists \text{ открытая окрестность } V(z) \text{ точки } z \text{ такая, что } \sup_{x, y \in V(z) \cap X} d_1(x, y) < 1/n\}.$$

При каждом $n = 1, 2, \dots$, если $z \in U_n$, то для нее только что определенной окрестности $V(z)$ имеем

$$V(z) \cap \{y \in Z \mid d(y, \bar{X}) < 1/n\} \subset U_n,$$

так что множество U_n открытое. Мы хотим показать, что $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Для любого $z \in X$ положим $W(z) = \{y \in X \mid d_1(y, z) < 1/3n\}$. Тогда множество $W(z)$ открыто в индуцированной топологии в пространстве X и потому имеет вид $W(z) = V(z) \cap X$, где $V(z)$ — открытая окрестность точки z в пространстве Z . Кроме того, имеет место неравенство

$$\sup_{x, y \in V(z) \cap X} d_1(x, y) < 1/n,$$

поэтому $z \in U_n$. Следовательно, $X \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Предположим теперь, что $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Тогда $d(z, \bar{X}) = 0$, и так как $\bar{X}$ замкнуто, то $z \in \bar{X}$. Найдется последовательность $\{x_k\} \subset X$ такая, что $x_k \rightarrow z$.

Пусть $V_n(z)$ — открытая окрестность точки z в Z , для которой

$$\sup_{x, y \in V_n(z) \cap X} d_1(x, y) < 1/n. \quad (11)$$

Для каждого n найдется индекс k_n такой, что $x_k \in V_n(z)$ для $k \geq k_n$. Из неравенства (11) видно, что $d_1(x_i, x_j) < 1/n$ для $i, j \geq k_n$, так что $\{x_k\}$ является последовательностью Коши в полном пространстве (X, d_1) и, следовательно, имеет предел в пространстве X . Но, по предположению, предел равен z , поэтому $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.

Чтобы доказать обратное утверждение, предположим, что (Z, d) — полное метрическое пространство и $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, где каждое множество U_n открыто в пространстве Z . Определим метрику d_1 в множестве Y формулой

$$d_1(y, z) = d(y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \min\{1/2^n, |[1/d(y, Z - U_n)] - [1/d(z, Z - U_n)]|\}.$$

Если $\{y_k\}$ — последовательность Коши в пространстве (Y, d_1) , то она является последовательностью Коши и в пространстве (Z, d) , и таким образом имеет предел $y \in Z$. Для каждого n имеем

$$|[1/d(y_i, Z - U_n)] - [1/d(y_j, Z - U_n)]| \rightarrow 0$$

при $i, j \rightarrow \infty$, поэтому величина $[1/d(y_k, Z - U_n)]$ остается ограниченной при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что $y \in U_n$ для каждого n , следовательно, $y \in Y$. $\square$

Как отмечалось ранее без доказательства, куб Гильберта наследует свойства метризуемости и сепарабельности от единичного интервала. Он

также наследует топологическую полноту. Это является частным случаем приводимого ниже общего утверждения о том, что полнота и сепарабельность метризуемых пространств сохраняются, когда берется счетное произведение пространств.

Предложение 7.4. Пусть $X_1, X_2, \dots$, — последовательность метризуемых пространств и $Y_n = X_1 X_2 \dots X_n, Y = X_1 X_2 \dots$. Тогда пространства Y и каждое Y_n метризуемы. Если каждое пространство X_k является сепарабельным или топологически полным пространством, то таковы же и пространства Y и каждое Y_n .

Доказательство. Если d_k — метрика в пространстве X_k , согласованная с его топологией, то расстояние

$$d(y, \hat{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \min \{1/2^k, d_k(\eta_k, \hat{\eta}_k)\},$$

где $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$, $\hat{y} = (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \dots)$, является метрикой, согласованной с топологией произведения. Если каждое пространство (X_k, d_k) полное, то, очевидно, и (Y, d) — полное пространство. Если G_k является счетной базой топологии в X_k , то семейство множеств вида $G_1 G_2 \dots G_n X_{n+1} X_{n+2} \dots$, где множества G_k пробегает G_k и n пробегает множество натуральных чисел, является счетной базой для топологии произведения в пространстве Y . Доказательство для произведения пространств Y_n аналогично. $\square$

Из предложений 7.2—7.4 видно, что каждое сепарабельное, топологически полное пространство гомеоморфно G_δ -множеству куба Гильберта, и обратно, каждое G_δ -множество куба Гильберта сепарабельно и топологически полно. Еще одно следствие этих предложений:

Следствие 7.4.1. Каждое сепарабельное, топологически полное пространство может быть гомеоморфно вложено в компактное метрическое пространство как плотное G_δ -множество.

Доказательство. Пусть X — сепарабельное и топологически полное пространство, и пусть φ — гомеоморфизм из X в H . Так как пространство H метризуемо, $\varphi(X)$ является G_δ -множеством в пространстве H (предложение 7.3), а значит, плотным G_δ -множеством в множестве $\overline{\varphi(X)}$. Теорема Тихонова утверждает, что пространство H компактно, поэтому множество $\overline{\varphi(X)}$ тоже компактно. $\square$

Если X и Z — топологические пространства, φ — гомеоморфизм из Z на X , а d — метрика в пространстве X , согласованная с его топологией, такая, что (X, d) — полное пространство, то метрика d_1 в пространстве Z определяемая соотношением (10), согласована с топологией Z , и пространство (Z, d_1) также полное. Таким образом, топологическая полнота сохраняется при гомеоморфизмах.

То же самое, как хорошо известно, справедливо для сепарабельности. Однако топологическая полнота несколько отличается от сепарабельности, так как необходимо вводить соответствующую метрику. Вполне возможно, что пространство, имеющее две метрики, согласованные с его топологией, является полным метрическим пространством в одной и не является им в другой метрике. Например, пусть пространство $X =$

$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ имеет дискретную топологию, первая метрика равна

$$d_1(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

и вторая $d_2(x, y) = |x - y|$. Тогда пространство (X, d_1) является полным, а пространство (X, d_2) — нет. Более удивительным является тот факт, что множество N_0 иррациональных чисел между 0 и 1 — топологически полное в обычной топологии. Чтобы убедиться в этом, представим множество N_0 в виде $N_0 = \bigcap_r \in Q([0, 1] - \{r\})$, где Q — множество рациональных чисел. Отсюда видно, что множество N_0 является G_δ -множеством отрезка $[0, 1]$ и, таким образом, топологически полно по предположению 7.3.

Другое доказательство может быть получено следующим образом. Пусть N — множество положительных целых чисел с дискретной топологией и N — произведение счетного числа множеств N . Пространство N называется *нулевым пространством Бэра* и является топологически полным (предложение 7.4). Топологическая полнота пространства N_0 следует из того, что пространства N и N_0 гомеоморфны. Приведем довольно длинное доказательство этого факта, поскольку оно имеется лишь в малодоступных источниках. Этот гомеоморфизм будет использован только для того, чтобы построить один контрпример (пример 1 в главе 8), так что это доказательство может быть пропущено читателем без ущерба для дальнейшего понимания.

Предложение 7.5. *Топологические пространства N_0 и N гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть Σ — множество конечных последовательностей положительных целых чисел. Если $z \in \Sigma \cup N$, будем обозначать компоненты z через ξ_k . Аналогично, ξ_k обозначают компоненты элемента $\hat{z}$ из множества $\Sigma \cup N$. *Длина элемента $z \in \Sigma \cup N$ по определению, равна числу его компонент. Если z имеет длину, большую или равную k , определим $z_k = (\xi_k, \xi_{k+1}, \dots)$ или $z_k = (\xi_k, \dots, \xi_m)$ в зависимости от того, имеет ли элемент z бесконечную длину или длину $m < \infty$.*

Для элемента $z \in \Sigma \cup N$ полагаем последовательно

$$x_1(z) = \xi_1^{-1},$$

$$x_2(z) = (\xi_1 + \xi_2^{-1})^{-1},$$

$$x_3(z) = (\xi_1 + (\xi_2 + \xi_3^{-1})^{-1})^{-1},$$

$$\dots$$

Если элемент z имеет длину $k < \infty$, то определим $x_1(z), x_2(z), \dots, x_k(z)$ указанным образом, и положим $x_{k+j}(z) = x_k(z), j = 1, 2, \dots$

Утверждение 1. *Последовательность $\{x_k(z)\}$ сходится к некоторому элементу из множества $(0, 1]$ при каждом $z \in \Sigma \cup N$.*

Если элемент z имеет конечную длину, это тривиально. Если элемент z имеет бесконечную длину, то выполняется цепочка неравенств

$$0 < x_{2n}(z) < x_{2n+2}(z) < x_{2n+1}(z) < x_{2n-1}(z) < 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

поэтому для каждого n справедливо соотношение

$$x_{2n}(z) < \liminf_{k \rightarrow \infty} x_k(z) < \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k(z) < x_{2n-1}(z). \quad (13)$$

Затем имеем

$$\begin{aligned} 0 &< x_{2n-1}(z) - x_{2n}(z) = [\xi_1 + x_{2n-2}(z)]^{-1} - [\xi_1 + x_{2n-1}(z)]^{-1} = \\ &= [\xi_1 + x_{2n-2}(z)]^{-1} [\xi_1 + x_{2n-1}(z)]^{-1} [x_{2n-1}(z) - x_{2n-2}(z)] < \\ &< [\xi_1 + (\xi_2 + 1)^{-1}]^{-2} [x_{2n-1}(z) - x_{2n-2}(z)] < \\ &< [\xi_1 + (\xi_2 + 1)^{-1}]^{-2} [\xi_2 + (\xi_3 + 1)^{-1}]^{-2} [x_{2n-3}(z) - x_{2n-2}(z)] \dots \\ &\dots < [\xi_1 + (\xi_2 + 1)^{-1}]^{-2} [\xi_2 + (\xi_3 + 1)^{-1}]^{-2} \dots [\xi_{2n-2} + (\xi_{2n-1} + 1)^{-1}]^{-2}. \end{aligned}$$

Так как

$$[\xi_{2k-1} + (\xi_{2k} + 1)^{-1}]^{-2} [\xi_{2k} + (\xi_{2k+1} + 1)^{-1}]^{-2} < 4/9, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

то получаем неравенство

$$0 < x_{2n-1}(z) - x_{2n}(z) < (4/9)^{n-1},$$

откуда следует утверждение 1.

Определим функцию $\varphi: \Sigma \cup \mathbb{N} \rightarrow (0, 1]$, полагая

$$\varphi(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(z).$$

Заметим, что если элемент $z \in \mathbb{N}$, то имеет место неравенство $0 < \varphi(z) < 1$. Кроме того, если элемент z имеет длину не меньше k , то выполняется равенство

$$\varphi(z) = \varphi[(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, 1/\varphi(z_k))]. \quad (14)$$

Утверждение 2. Если $z \in \mathbb{N}$ и $\varphi(z) = \varphi(\hat{z})$, то $z = \hat{z}$.

Предположим, что $\varphi(z) = \varphi(\hat{z})$, но $z \neq \hat{z}$. Согласно формуле (14), без ограничения общности, можно считать, что $\xi_1 \neq \hat{\xi}_1$ или что $\hat{z}$ имеет длину, равную единице, и $\xi_1 = \hat{\xi}_1$. В последнем случае из (12) следует, что

$$\varphi(\hat{z}) = 1/\hat{\xi}_1 = 1/\xi_1 = x_1(z) > x_2(z) > \varphi(z),$$

и это приводит к противоречию. В первом случае, если $\hat{z}$ имеет длину, равную единице, то из (14) получаем

$$1/\hat{\xi}_1 = \varphi(\hat{z}) = \varphi(z) = 1/[\xi_1 + \varphi(z_2)],$$

откуда следует $\hat{\xi}_1 = \xi_1 + \varphi(z_2)$, а это невозможно, так как $0 < \varphi(z_2) < 1$. Если $\hat{z}$ имеет длину больше единицы, то

$$1/[\hat{\xi}_1 + \varphi(\hat{z}_2)] = \varphi(\hat{z}) = \varphi(z) = 1/[\xi_1 + \varphi(z_2)]$$

и $\hat{\xi}_1 + \varphi(\hat{z}_2) = \xi_1 + \varphi(z_2)$. Это также невозможно, так как $0 < \varphi(\hat{z}_2) < 1$ и $0 < \varphi(z_2) < 1$.

Утверждение 3. Каждое рациональное число из множества $(0, 1]$ представимо в виде $\varphi(\hat{z})$, где $\hat{z} \in \Sigma$.

Пусть r_1/q — рациональное число из множества $(0, 1]$, приведенное к несократимому виду. r_1 и q — положительные целые числа. Тогда

$$r_1/q = (q/r_1)^{-1} = [q_1 + (r_2/r_1)]^{-1},$$

где q_1 и r_2 — положительные целые числа и $r_2 < r_1$. Аналогично,

$$r_2/r_1 = (r_1/r_2)^{-1} = [q_2 + (r_3/r_2)]^{-1},$$

где q_2 и r_3 — положительные целые числа и $r_3 < r_2$. Продолжая таким образом, в конце концов получим, что $r_n = 1$ и

$$r_1/q = \varphi[(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, r_{n-1})].$$

Утверждения 2 и 3 показывают, что если $z \in \mathbb{N}$, то $\varphi(z)$ — иррациональное число. Другими словами, функция φ отображает пространство $\mathbb{N}$ в пространство $\mathbb{N}_0$. С другой стороны, если задан элемент $y \in \mathbb{N}_0$, то можно выбрать положительные целые числа $\xi_1, \xi_2, \dots$, такие, что

$$(\xi_1 + 1)^{-1} < y < \xi_1^{-1},$$

$$(\xi_1 + \xi_2^{-1})^{-1} < y < (\xi_1 + (\xi_2 + 1)^{-1})^{-1},$$

$$(\xi_1 + (\xi_2 + (\xi_3 + 1)^{-1})^{-1})^{-1} < y < (\xi_1 + (\xi_2 + \xi_3^{-1})^{-1})^{-1},$$

и т.д., так что, полагая $z = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, будем иметь неравенства

$$x_{2k}(z) < y < x_{2k-1}(z), \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что $\varphi(z) = y$, поэтому φ отображает $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}_0$ и, согласно утверждению 2, является взаимно однозначным отображением. Покажем, что ограничение отображения φ на множестве $\mathbb{N}$ открыто и непрерывно. Пусть множество $V \subset \mathbb{N}$ открыто. Можно, без ограничения общности, предположить, что

$$V = \{z \in \mathbb{N} \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n)\}.$$

Тогда множество $\varphi(V)$ равно

$$\varphi(V) = \{(\hat{\xi}_1 + (\hat{\xi}_2 + \dots + (\hat{\xi}_n + \varphi(z))^{-1} \dots)^{-1})^{-1} \mid z \in \mathbb{N}\},$$

и так как $\{\varphi(z) \mid z \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_0$, то множество $\varphi(V)$ открыто. Так как сходимость в $\mathbb{N}$

является покомпонентной и $x_n(z)$ зависит только от первых n компонент элемента $z \in N$, то из (13) вытекает непрерывность φ на множестве N . $\square$

Теперь изучим свойства метризуемых пространств, относящиеся к понятию вполне ограниченности.

Определение 7.4. Метрическое пространство (X, d) называется *вполне ограниченным*, если для любого $\epsilon > 0$ существует конечное множество F_ϵ из пространства X , для которого выполняется соотношение

$$X = \bigcup_{x \in F_\epsilon} \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Вполне ограниченное метрическое пространство обязательно сепарабельно, так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$ является в нем счетным всюду плотным подмножеством. Однако вполне ограниченность зависит от метрики, и пространство, которое вполне ограничено (и сепарабельно) в одной метрике, может не быть вполне ограниченным в другой.

Подобно сепарабельности, вполне ограниченность сохраняется при переходе к подпространствам, т.е. если пространство (X, d) вполне ограничено и $Y \subset X$, пространство (Y, d) тоже вполне ограничено. Чтобы убедиться в этом, возьмем $\epsilon > 0$, и пусть $F_{\epsilon/2}$ будет конечным подмножеством пространства X таким, что

$$X = \bigcup_{x \in F_{\epsilon/2}} \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon/2\}.$$

Выберем точку в каждом из множеств

$$Y \cap \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon/2\}, \quad x \in F_{\epsilon/2},$$

в которых это возможно, и назовем набор таких точек множеством G_ϵ . Тогда

$$Y = \bigcup_{y \in G_\epsilon} \{z \in Y \mid d(y, z) < \epsilon\}.$$

Воспользуемся этим фактом, чтобы доказать следующий классический результат, относящийся к понятиям полноты, компактности и вполне ограниченности.

Предложение 7.6. Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено.

Доказательство. Если (X, d) — компактное метрическое пространство, то каждая последовательность Коши имеет в нем предельную точку. Такая последовательность сходится к этой точке, откуда следует полнота. Кроме того, для любого $\epsilon > 0$ семейство множеств

$$\{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}, \quad x \in X$$

содержит конечное покрытие множества X . Следовательно, пространство (X, d) вполне ограничено.

Если пространство (X, d) вполне ограниченное и $S = \{s_j\}$ — произвольная последовательность в (X, d) , то в некотором множестве $B_1 = \{y \in X \mid d(x_1, y) < 1\}$ должна лежать бесконечная подпоследовательность $S_1 \subset S$. Так как B_1 вполне ограничено, то бесконечная подпоследовательность $S_2 \subset S_1$ должна лежать в некотором множестве $B_2 = \{y \in B_1 \mid d(x_2, y) < 1/2\}$. Продолжая таким же образом, получим для каждого n бесконечную последовательность $S_{n+1} \subset S_n$, лежащую в $B_{n+1} = \{y \in B_n \mid d(x_{n+1}, y) < 1/(n+1)\}$. Пусть числа $j_1 < j_2 < \dots$ таковы, что $s_{j_n} \in S_n$. Тогда последовательность $\{s_{j_n}\}$ является последовательностью Коши и поэтому сходится. Следовательно, последовательность S имеет предельную точку, что означает компактность пространства (X, d) . $\square$

Следствие 7.6.1. Куб Гильберта вполне ограничен в любой метрике, согласованной с его топологией, и любое сепарабельное метризуемое пространство имеет вполне ограниченную метризацию.

Доказательство. Согласно теореме Тихонова куб Гильберта компактен. Теорема Урысона (предложение 7.2) позволяет гомеоморфно вложить любое сепарабельное метризуемое пространство в куб Гильберта. $\square$

Как упоминалось ранее, из вполне ограниченности следует сепарабельность. Объединяя этот факт с предложением 7.6, получаем следующий результат.

Следствие 7.6.2. Компактное метрическое пространство полно и сепарабельно.

Если X — метризуемое пространство, то множество всех ограниченных непрерывных и действительных функций на X обозначается $C(X)$. Как хорошо известно, множество $C(X)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

и мы всегда будем считать, что в пространстве $C(X)$ выбраны метрика и топология, соответствующие этой норме. Если d — метрика в пространстве X , согласованная с его топологией, то мы обозначаем через $U_d(X)$ семейство функций из пространства $C(X)$, равномерно непрерывных относительно метрики d . Всегда будем считать, что пространство $U_d(X)$ имеет топологию, индуцированную пространством $C(X)$. Завершим этот раздел обсуждением свойств пространств $C(X)$ и $U_d(X)$, вытекающих из свойств пространства X .

Предложение 7.7. Если X — компактное метризуемое пространство, то пространство $C(X)$ сепарабельно.

Доказательство. Пространство X сепарабельно (следствие 7.6.2). Пусть $\{x_k\}$ — счетное всюду плотное множество в пространстве X , и пусть $F_1, F_2, \dots$ — занумерованное семейство множеств вида $\{y \in X \mid d(x_k, y) \leq 1/n\}$, где k и n пробегает значения натурального ряда. Пусть для любой непересекающейся пары множеств F_i и F_j , f_{ij} есть непрерывная функция, принимающая значения из отрезка $[0, 1]$, такая, что $f_{ij} = 0$ для $x \in F_i$ и $f_{ij} = 1$ для $x \in F_j$. Если множества F_i и F_j пересекаются, то считаем функцию f_{ij} тождественно равной единице. Пусть множество S состоит из функций f_{ij} , где i и j пробегает значения натурального ряда. Семейство функций S , очевидно, разделяет точки в пространстве X , т.е. для любых двух точек $x \neq y$ существует функция $f \in S$, для которой $f(x) \neq f(y)$. Пусть P — множество всех многочленов конечной степени над семейством S , так что типичный элемент из P имеет вид

$$\sum_{(i_1, \dots, i_n), (j_1, \dots, j_n)} \alpha(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n) f_{i_1}^{j_1} \dots f_{i_n}^{j_n},$$

где $\alpha(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n) \in R$, $f_{i_1}, \dots, f_{i_n} \in S$, а сумма конечна. Тогда P является векторным пространством, причем сумма и произведение любых двух элементов из P тоже принадлежат P . Семейство P с так определенными операциями представляет собой алгебру, и, согласно теореме Стоуна-Вейерштрасса, P всюду плотно в пространстве $C(X)$. Пусть P_0 есть семейство многочленов конечной степени над семейством S с рациональными коэффициентами. Простые соображения, основанные на аппроксимации, показывают, что P_0 всюду плотно в P и, таким образом, также всюду плотно и в пространстве $C(X)$. Так как P_0 счетно, то $C(X)$ является сепарабельным пространством. $\square$

Определение 7.5. Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) — метрические пространства. Отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ является *изометрией*, если имеет место тождество $d_1(x_1, x_2) = d_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X$.

В этом случае мы говорим, что пространства (X, d_1) и (X, d_2) *изометричны*.

Если пространства (X, d_1) и (Y, d_2) удовлетворяют определению 7.5, то можно рассматривать первое как подпространство второго и причем расстояния между точками в пространстве X не меняются от этого вложения. Таким образом, изометрия является гомеоморфизмом, сохраняющим метрику.

Предложение 7.8. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Тогда существуют полное метрическое пространство (X_d, d_1) , называемое *пополнением пространства* (X, d) , и изометрия $\varphi: X \rightarrow X_d$ такие, что множество $\varphi(X)$ всюду плотно в X_d .

Доказательство. Построение пополнения метрического пространства стандартно, поэтому дадим лишь его набросок. Для данного метрического пространства (X, d) определим отношение эквивалентности $\sim$ на множестве последовательностей Коши в (X, d) посредством соотношения

$$\{x_n\} \sim \{x'_n\} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = 0.$$

Пусть X_d есть множество классов эквивалентности последовательностей Коши в пространстве (X, d) при этом отношении, и пусть метрика d_1 определена на X_d соотношением

$$d_1(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n), \quad (15)$$

где последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ выбраны таким образом, что они представляют классы эквивалентности x и y . Легко проверить, что предел в выражении (15) существует для каждой пары последовательностей Коши $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, и он не зависит от конкретных последовательностей, выбранных для представления классов эквивалентности x и y . Более того, можно показать, что пространство (X_d, d_1) является полным метрическим пространством, и отображение φ , которое переводит $x \in X$ в класс эквивалентности из X_d , содержащий последовательность Коши $(x, x, \dots)$, является изометрией. Образ пространства X при отображении φ является всюду плотным в X_d . $\square$

Можно считать, что пространство X_d состоит из пространства X вместе с пределами всех последовательностей Коши в X . Нас на самом деле интересует случай, когда пространство (X, d) вполне ограничено. В этом случае справедлив следующий результат.

Следствие 7.8.1. Пусть (X, d) — вполне ограниченное метрическое пространство. Существуют компактное метрическое пространство (X_d, d_1) и изометрия $\varphi: X \rightarrow X_d$ такие, что множество $\varphi(X)$ всюду плотно в X_d .

Доказательство. Ввиду предложений 7.6 и 7.8 достаточно доказать, что пополнение (X_d, d_1) пространства (X, d) вполне ограничено. Выберем число $\epsilon > 0$. Считая пространство (X, d) подпространством пространства (X_d, d_1) , выберем конечное множество F_ϵ в X , для которого

$$X = \bigcup_{x \in F_\epsilon} \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon/2\}.$$

Так как X всюду плотно в X_d , то имеем

$$X_d = \bigcup_{x \in F_\epsilon} \{y \in X_d \mid d_1(x, y) < \epsilon\}. \quad \square$$

Если X — сепарабельное метризуемое пространство, то вовсе не обязательно, чтобы пространство $C(X)$ было сепарабельным пространством (если только X не компактно; в этом случае имеет место предложение 7.7). Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq \frac{1}{2}, \\ 1 + 2x, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ 1 - 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

из R в $[0, 1]$, и для любой бесконечной последовательности $b = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ нулей и единиц положим

$$f_b(x) = \sum_{\{n | \beta_n = 1\}} f(x - n).$$

Мы построили несчетное семейство функций f_b из $C(R)$ такое, что если $b_1 \neq b_2$, то $\|f_{b_1} - f_{b_2}\| = 1$. Следовательно, пространство $C(R)$ не может быть сепарабельным.

Однако для любого сепарабельного метрического пространства X существует метрика d в X , согласованная с его топологией, такая, что пространство $U_d(X)$ сепарабельно. Это вытекает из нашего следующего предложения и того факта, что в сепарабельном случае существует метрика, в которой пространство вполне ограничено (следствие 7.6.1). Сначала докажем одну лемму.

Лемма 7.3. Пусть Y — метризуемое пространство, d — метрика в Y , согласованная с его топологией, и $X \subset Y$. Если функция $g \in U_d(X)$, то g непрерывно продолжается на пространство Y , т.е. существует функция $\hat{g} \in C(Y)$ такая, что $g(x) = \hat{g}(x)$ для всех $x \in X$, и продолжение $\hat{g}$ может быть выбрано таким образом, чтобы $\|g\| = \|\hat{g}\|$. Если множество X всюду плотно в пространстве Y , то такая функция $\hat{g}$ единственна.

Доказательство. Так как функция g равномерно непрерывна на множестве X , то для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta(\epsilon) > 0$, что если $x_1, x_2 \in X$ и $d(x_1, x_2) \leq \delta(\epsilon)$, то $|g(x_1) - g(x_2)| \leq \epsilon$. Предположим, что $y \in X$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset X$, для которой $x_n \rightarrow y$. Для любого $\epsilon > 0$ существует число $N(\epsilon)$ такое, что $d(x_n, x_m) \leq \delta(\epsilon)$ для всех $n, m \geq N(\epsilon)$, поэтому последовательность $\{g(x_n)\}$ является последовательностью Коши в пространстве R . Определим $\hat{g}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)$. Заметим, что при $n \geq N(\epsilon)$ имеет место неравенство $|g(x_n) - \hat{g}(y)| \leq \epsilon$.

Предположим теперь, что $x \in X$ и $d(x, y) \leq \delta(\epsilon)/2$. Выберем число $n > N(\epsilon)$ такое, чтобы $d(x_n, y) \leq \delta(\epsilon)/2$. Тогда $d(x, x_n) \leq \delta(\epsilon)$ и

$$|g(x) - \hat{g}(y)| \leq |g(x) - g(x_n)| + |g(x_n) - \hat{g}(y)| \leq 2\epsilon. \quad (16)$$

Это показывает, что для любой последовательности $\{x'_n\} \subset X$ и $x'_n \rightarrow y$ имеем $\hat{g}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x'_n)$, поэтому определение функции $\hat{g}(y)$ не зависит от выбора конкретной последовательности $\{x_n\}$. Если $y \in X$, то можно взять $x_n = y$, $n = 1, 2, \dots$, тогда $g(y) = \hat{g}(y)$, и поэтому $\hat{g}$ есть продолжение g . Если $\{y_m\}$ является последовательностью в множестве $\bar{X}$, сходящейся к точке $y \in \bar{X}$, то существует последовательность $\{x_{mn}\}$ в X такая, что $y_m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{mn}$.

Выберем числа $n_1 < n_2 < \dots$ так, чтобы $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{mn_m} = y$ и $d(x_{mn_m}, y_m) \leq \delta(1/m)/2$. Тогда

$$\hat{g}(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} g(x_{mn_m}), \quad (17)$$

и, согласно (16), выполняется неравенство

$$|g(x_{mn_m}) - \hat{g}(y_m)| \leq 2/m. \quad (18)$$

Устремив в неравенстве (18) $m \rightarrow \infty$ и используя неравенство (17), заключаем, что $\hat{g}(y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{g}(y_m)$, и, стало быть, функция $\hat{g}$ непрерывна на $\bar{X}$. Ясно, что

$$\sup_{x \in X} |g(x)| = \sup_{y \in \bar{X}} |\hat{g}(y)|.$$

Если $\bar{X} = Y$, то, очевидно, что функция $\hat{g}$ единственна, и доказательство завершено. Если $\bar{X}$ не совпадает с Y , то надо использовать теорему Титце о продолжении (см., например, Аш [7] или Даганджи [31]), и с ее помощью распространить функцию $\hat{g}$ на все пространство Y так, чтобы

$$\|g\| = \sup_{y \in Y} |\hat{g}(y)|. \quad \square$$

Предложение 7.9. Если (X, d) — вполне ограниченное метрическое пространство, то пространство $U_d(X)$ сепарабельно.

Доказательство. В следствии 7.8.1 утверждается, что пространство (X, d) может быть изометрично всюду плотно вложено в компактное метрическое пространство (X_d, d_1) . Будем считать X подпространством пространства X_d . Пусть задана произвольная функция $g \in U_d(X)$. По лемме 7.3 она имеет единственное продолжение $\hat{g} \in C(X_d)$ на X_d такое, что $\|g\| = \|\hat{g}\|$. Отображение $g \rightarrow \hat{g}$ является линейным и сохраняет норму, поэтому оно является изометрией из пространства $U_d(X)$ в пространство $C(X_d)$. Последнее пространство сепарабельно, согласно предложению 7.7, откуда следует сепарабельность пространства $U_d(X)$. $\square$

7.3. Борелевские пространства

В случаях, когда пространства состояний и управлений — произвольные множества или даже произвольные измеримые пространства, не удастся осуществить построения, нужные для излагаемой далее теории динамического программирования. По этой причине мы вводим понятие борелевского пространства, и в этом и в последующих разделах устанавливаем свойства борелевских пространств, позволяющие провести затем нужные построения.

Определение 7.6. Если X — топологическое пространство, то наименьшая σ -алгебра подмножеств пространства X , которая содержит все открытые подмножества из X , называется *борелевской σ -алгеброй* и обозначается B_X . Элементы из B_X называются *борелевскими подмножествами* пространства X .

Если X — сепарабельное метризуемое пространство, а F есть σ -алгебра в X , содержащая подбазу S топологии в этом пространстве, то F содержит B_X . Это вытекает из того факта, что любое открытое множество в пространстве X может быть представлено как *счетное* объединение конечных пересечений множеств из S (предложение 7.1). Таким образом, получаем, что $B_X = \sigma(S)$ для любой подбазы S .

Мы будем часто называть наименьшую σ -алгебру, содержащую некоторый класс подмножеств, *σ -алгеброй, порожденной этим классом*. Так, B_X — это σ -алгебра, порожденная классом открытых множеств пространства X . Заметим, что B_R является классом борелевских множеств действи-

тельных чисел в обычном смысле, т.е. σ -алгеброй, порожденной интервалами.

Если задан класс действительных функций на топологическом пространстве X , то обычно говорят о *слабейшей* топологии, относительно которой все функции из этого класса непрерывны. Точно так же можно говорить о *наименьшей* σ -алгебре, относительно которой все функции данного класса измеримы. Если X — метризуемое пространство, то легко показать, что его топология является слабой, относительно которой все функции в пространстве $C(X)$ непрерывны. Следующее предложение дает аналогичный результат для борелевской σ -алгебры B_X . При его доказательстве и в дальнейшем будем использовать тот факт, что для любых двух множеств Ω, Ω' , любого семейства C подмножеств из Ω' и любого отображения $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ имеет место соотношение

$$\sigma[f^{-1}(C)] = f^{-1}[\sigma(C)].$$

Предложение 7.10. Пусть X — метризуемое пространство. Тогда B_X является наименьшей σ -алгеброй, относительно которой любая функция из пространства $C(X)$ измерима, т.е. $B_X = \sigma\{U_{f \in C(X)} f^{-1}(B_R)\}$.

Доказательство. Обозначим $F = \sigma\{U_{f \in C(X)} f^{-1}(B_R)\}$, и пусть T_R — топология на прямой R . Имеет место включение

$$\begin{aligned} F &= \sigma\left[\bigcup_{f \in C(X)} f^{-1}[\sigma(T_R)]\right] = \\ &= \sigma\left[\bigcup_{f \in C(X)} \sigma[f^{-1}(T_R)]\right] \subset \sigma\left[\bigcup_{f \in C(X)} B_X\right] = B_X. \end{aligned}$$

Чтобы доказать обратное включение $B_X \subset F$, необходимо только установить, что F содержит любое непустое открытое множество. Согласно лемме 7.2 достаточно показать, что F содержит любое непустое замкнутое множество. Пусть A будет таким множеством. Без ограничения общности можно предположить, что $A \neq X$, и тогда существует точка $x \in X - A$. Пусть множество $B = \{x\}$, и пусть f — функция, определенная в лемме 7.1. Тогда $A = f^{-1}(\{0\}) \in F$. $\square$

Мы воспользуемся теперь леммой 7.2, чтобы доказать еще одно полезное свойство борелевской σ -алгебры в метризуемом пространстве.

Предложение 7.11. Пусть X — метризуемое пространство. Тогда B_X есть наименьший класс множеств, который замкнут относительно счетных объединений и пересечений и содержит любое замкнутое (открытое) множество.

Доказательство. Пусть D будет наименьшим классом множеств, содержащих любое замкнутое множество, и замкнутых относительно счетных объединений и пересечений, т.е. пусть D — пересечение всех таких классов. Тогда $D \in B_X$, и достаточно доказать, что класс D замкнут относительно взятия дополнения. Пусть D' будет классом дополнений множеств из D . Тогда класс D' также замкнут относительно образования счетных объединений и пересечений. Лемма 7.2 показывает, что D содержит любое открытое множество, поэтому класс D' содержит любое замкнутое множество, и, следовательно, $D \subset D'$. Для любого множества $D \in D$ мы имеем, что $D \in D'$, поэтому $D^c \in D$. $\square$

Определение 7.7. Пусть X — топологическое пространство. Если существуют полное сепарабельное метрическое пространство Y и борелевское подмножество $B \in B_Y$ такие, что X гомеоморфно B , то говорят, что X является *борелевским пространством*. Пустое множество также будем считать борелевским пространством.

Заметим, что каждое борелевское пространство метризуемо и сепарабельно. А также каждое полное сепарабельное метризуемое пространство является борелевским пространством. Примерами борелевских пространств могут служить пространства R , R^n и R^* со слабой топологией, содержащей интервалы $[-\infty, \alpha)$, $(\beta, \infty]$, (α, β) , $\alpha, \beta \in R$. (В этой топологии функция φ , определенная соотношением

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \infty, \\ \operatorname{sgn}(x) (1 - e^{-|x|}), & \text{если } x \in R, \\ -1, & \text{если } x = -\infty, \end{cases}$$

является гомеоморфизмом из R^* на $[-1, 1]$). Любое счетное множество X с дискретной топологией (т.е. топологией, состоящей из всех подмножеств множества X) тоже является борелевским пространством. Покажем, что каждое борелевское подмножество борелевского пространства есть борелевское пространство. Для этого потребуются следующие две леммы. Доказательство первой элементарно и предоставляется читателю.

Лемма 7.4. Если Y — топологическое пространство и множество $E \subset Y$, то σ -алгебра B_E , порожденная индуцированной топологией, совпадает с индуцированной σ -алгеброй, т.е. с семейством $\{E \cap C | C \in B_Y\}$. В частности, если $E \in B_Y$, то B_E состоит из борелевских подмножеств пространства Y , содержащихся в множестве E .

Лемма 7.5. Если X и Y — топологические пространства и φ — гомеоморфизм из X в Y , то $\varphi(B_X) = B_{\varphi(X)}$.

Доказательство. Если T_X — топология в пространстве X , то $\varphi(T_X)$ является топологией в $\varphi(X)$. Так как φ — взаимно однозначное отображение, то φ — отображение, обратное к некоторому отображению, и

$$\varphi(B_X) = \varphi[\sigma(T_X)] = \sigma[\varphi(T_X)] = B_{\varphi(X)}. \quad \square$$

Предложение 7.12. Если X — борелевское пространство и множество $B \in B_X$, то B — борелевское пространство.

Доказательство. Пусть φ — гомеоморфизм из X в некоторое полное сепарабельное метрическое пространство Y такой, что $\varphi(X) \in B_Y$. Из леммы 7.5 и из того факта, что $B \in B_X$, получаем, что $\varphi(B) \in B_{\varphi(X)}$. Из леммы 7.4 следует, что $\varphi(B) \in B_Y$. $\square$

Подобно сепарабельности и полноте, свойство быть борелевским пространством сохраняется при операции счетного декартова произведения.

Предложение 7.13. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность борелевских пространств и $Y_n = X_1 X_2 \dots X_n$, $Y = X_1 X_2 \dots$. Тогда пространство Y и каждое пространство Y_n с топологией произведения являются борелевскими пространствами, а их борелевские σ -алгебры совпадают с произведениями σ -алгебр, т.е. $B_{Y_n} = B_{X_1} B_{X_2} \dots B_{X_n}$ и $B_Y = B_{X_1} B_{X_2} \dots$

Доказательство. Как и в предложении 7.4, сосредоточим наше внимание на более трудном случае бесконечного произведения. Рассмотрим последнее утверждение. Каждое пространство X_k имеет счетную базу G_k для своей топологии и семейство множеств вида $G_1 G_2 \dots G_n X_{n+1} X_{n+2} \dots$, где G_k пробегает G_k , а n пробегает значения из множества натуральных чисел, является базой для топологии произведения в пространстве Y . А σ -алгебра, порожденная этой топологией, есть B_Y . Напомним, что произведение σ -алгебр $B_{X_1} B_{X_2} \dots$ является наименьшей σ -алгеброй, содержащей все конечномерные прямоугольники, т.е. все множества вида $B_1 B_2 \dots B_n X_{n+1} X_{n+2} \dots$, где $B_k \in B_{X_k}$, $k = 1, \dots, n$. Очевидно, что любое множество базы топологии произведения в пространстве Y представляет

собой конечномерный измеримый прямоугольник, и так как любое открытое подмножество пространства Y является счетным объединением таких открытых множеств базы, то любое открытое множество из Y $V_{X_1} V_{X_2} \dots$ измеримо. Отсюда следует, что $V_Y \subset V_{X_1} V_{X_2} \dots$. (Заметим, что эти рассуждения основываются на сепарабельности пространств $X_1, X_2, \dots$. Без предположения сепарабельности результат несправедлив). Обратное включение классов множеств следует из того факта, что для любых k и $V_k \in V_{X_k}$ имеем $X_1 X_2 \dots X_{k-1} V_k X_{k+1} \dots \in V_Y$.

Чтобы доказать, что Y — борелевское пространство, заметим, что пространство X_k может быть отображено гомеоморфизмом φ_k на борелевское подмножество сепарабельного топологически полного пространства $\tilde{X}_k$. Произведение $\tilde{Y} = \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \dots$ сепарабельно и топологически полно, а отображение $\varphi: Y \rightarrow \tilde{Y}$, определенное соотношением

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2), \dots),$$

является гомеоморфизмом из пространства Y на множество $\varphi_1(X_1)\varphi_2(X_2)\dots$. Это последнее множество принадлежит $V_{\tilde{X}_1} V_{\tilde{X}_2} \dots = V_{\tilde{Y}}$, что доказывает утверждение. $\square$

Определение 7.8. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ является измеримым по Борелю, если $f^{-1}(B) \in V_X$ для всех множеств $B \in V_Y$.

Функции, измеримые по Борелю, во многих отношениях связаны с борелевскими σ -алгебрами так же, как непрерывные функции связаны с топологиями (системами открытых множеств). Например, уже использовался тот факт, что если $f_k: X \rightarrow Y_k$ — непрерывное отображение из топологического пространства X в топологическое пространство Y_k , $k = 1, 2, \dots$, то отображение $F: X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots$, определенное формулой $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$, также непрерывно. Это следует из покомпонентного характера сходимости в произведении пространств. Для функций, измеримых по Борелю, и борелевских пространств справедлив аналогичный результат.

Предложение 7.14. Пусть X — борелевское пространство, $Y_1, Y_2, \dots$ — последовательность борелевских пространств, а $f_k: X \rightarrow Y_k$ — последовательность отображений. Если любое отображение f_k измеримо по Борелю, $k = 1, 2, \dots$, то отображение $F: X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots$, определенное как $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$, и отображение $F_n: X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_n$, определенное как

$$F_n(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)),$$

измеримы по Борелю.

Доказательство. Рассмотрим снова только бесконечное произведение. Борелевская σ -алгебра в пространстве $Y_1 Y_2 \dots$ порождается множествами вида $B_1 B_2 \dots$, где $B_k \in V_{Y_k}$, $k = 1, 2, \dots$. Прообраз такого множества в пространстве $Y_1 Y_2 \dots$ определяется соотношением

$$F^{-1}(B_1 B_2 \dots) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \cap \dots \quad (19)$$

Левая часть выражения (19) принадлежит V_X для любых $B_k \in V_{Y_k}$, $k = 1, 2, \dots$, тогда и только тогда, когда множества $f_k^{-1}(B_k)$ содержатся в V_X для каждого $B_k \in V_{Y_k}$, $k = 1, 2, \dots$, откуда следует требуемое утверждение. $\square$

Следствие 7.14.1. Пусть X и Y — борелевские пространства, D — борелевское подмножество пространства X и отображение $f: D \rightarrow Y$ измеримо по Борелю. Тогда график отображения $\text{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \in XY | x \in D\}$ измерим по Борелю.

Доказательство. Отображения $(x, y) \rightarrow f(x)$ и $(x, y) \rightarrow y$ из DY в Y измеримы по Борелю, поэтому отображение $F(x, y) = (f(x), y)$ из DY в YY измеримо по Борелю. Далее,

$$Gr(f) = F^{-1}(\{(y, y) | y \in Y\}).$$

Так как множество $\{(y, y) | y \in Y\}$ замкнуто в YY , то множество $Gr(f)$ измеримо по Борелю. $\square$

Понятие гомеоморфизма дает возможность классифицировать топологические пространства, так как оно позволяет выделить те из них, которые "топологически эквивалентны". Можно также классифицировать измеримые пространства, выделяя те из них, которые неразличимы, если рассматривать их как множества с σ -алгебрами. Применим это к борелевским пространствам.

Определение 7.9. Пусть X и Y — борелевские пространства и $\varphi: X \rightarrow Y$ — измеримое по Борелю взаимно однозначное отображение такое, что φ^{-1} измеримо по Борелю на $\varphi(X)$. Тогда φ называется *борелевским изоморфизмом*, и говорят, что пространства X и $\varphi(X)$ *борелевски изоморфны* (или просто *изоморфны*).

Если X и Y — борелевские пространства и $\varphi: X \rightarrow Y$ — борелевский изоморфизм, то возникает искушение считать X и $\varphi(X)$ идентичными измеримыми пространствами. Однако трудность здесь заключается в том, что X — борелевское пространство, а $\varphi(X)$ может им не быть. Это несоответствие устраняется следующей интуитивно правдоподобной теоремой, доказательство которой (довольно длинное) можно найти в разделе 3 главы 1 книги Партахасаратхи [65]. Нам, однако, этот результат не понадобится.

Предложение 7.15 (теорема Куратовского). Пусть X — борелевское пространство, Y — сепарабельное метризуемое пространство и отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ однозначно и измеримо по Борелю. Тогда $\varphi(X)$ — борелевское подмножество Y и отображение φ^{-1} тоже измеримо по Борелю. В частности, если Y — борелевское пространство, то X и $\varphi(X)$ являются изоморфными борелевскими пространствами.

Преимущество классификации пространств с помощью борелевских изоморфизмов иллюстрируется следующим результатом. Этот результат понадобится в дальнейшем изложении, однако доказательство его довольно длинное и вынесено в раздел Б. 2 приложения Б.

Предложение 7.16. Борелевские пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую мощность.

В связи с предложением 7.16 возникает вопрос о возможных мощностях борелевских пространств. Конечно, существуют борелевские пространства, которые имеют счетное число элементов или заданное конечное число элементов. В обоих этих случаях борелевская σ -алгебра состоит из всех подмножеств данного пространства, и предложение 7.16 тривиально.

Каждое борелевское пространство имеет мощность, меньшую или равную мощности континуума, потому что может быть гомеоморфно вложено в гильбертов куб. Даже если допустить, что существует несчетная мощность, строго меньшая c , то из доказательства предложения 7.16, приведенного в приложении Б, следует, что любое несчетное борелевское пространство имеет мощностью c . Объединяя этот факт и предложение 7.16, мы получаем следующий результат.

Следствие 7.16.1. Каждое несчетное борелевское пространство борелевски изоморфно любому другому несчетному борелевскому пространству. В частности, каждое несчетное борелевское пространство изоморфно единичному отрезку $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$ и борелевскому нулевому пространству N .

7.4. Вероятностные меры на борелевских пространствах

Если X — метризуемое пространство, то будем называть вероятностную меру p на измеримом пространстве (X, B_X) просто вероятностной мерой на X . Множество всех вероятностных мер на X будет обозначаться $P(X)$. Вероятностная мера $p \in P(X)$ задает линейный функционал $I_p: C(X) \rightarrow R$, определяемый формулой

$$I_p(f) = \int f dp. \quad (20)$$

С другой стороны, любая функция $f \in C(X)$ задает функцию $\theta_f: P(X) \rightarrow R$, определяемую формулой

$$\theta_f = \int f dp. \quad (21)$$

Эти соотношения и факт измеримости пространства X позволяют нам установить различные свойства множества $P(X)$. В частности, будет доказано, что в множестве $P(X)$ существует естественная топология, а именно — слабая топология, относительно которой любое отображение вида (21) непрерывно, и что в этой топологии $P(X)$ является борелевским пространством, если только X — борелевское пространство.

7.4.1. Характеризация вероятностных мер

Определение 7.10. Пусть X — метризуемое пространство. Говорят, что вероятностная мера $p \in P(X)$ *регулярна*, если для любого множества $B \in B_X$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} p(B) &= \sup \{ p(F) \mid F \subset B, F \text{ замкнуто} \} = \\ &= \inf \{ p(G) \mid B \subset G, G \text{ открыто} \}. \end{aligned} \quad (22)$$

Предложение 7.17. Пусть X — метризуемое пространство. Любая вероятностная мера $p \in P(X)$ *регулярна*.

Доказательство. Пусть дана мера $p \in P(X)$, и пусть E — семейство множеств $B \in B_X$, для которых выполняется равенство (22). Если множество $H \subset X$ открыто, то $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где $\{F_n\}$ — расширяющаяся последовательность замкнутых множеств (лемма 7.2), поэтому выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \inf \{ p(G) \mid H \subset G, G \text{ открыто} \} &= p(H) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(F_n) \leq \\ &\leq \sup \{ p(F) \mid F \subset H, F \text{ замкнуто} \} \leq p(H). \end{aligned}$$

Следовательно, E содержит каждое открытое множество в пространстве X . Покажем, что E является σ -алгеброй, откуда будет следовать, что $E = B_X$.

Если $B \in E$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} p(B^c) &= 1 - p(B) = 1 - \sup \{ p(F) \mid F \subset B, F \text{ замкнуто} \} = \\ &= \inf \{ p(G) \mid B^c \subset G, G \text{ открыто} \} \end{aligned}$$

и аналогично

$$p(B^c) = \sup \{ p(F) \mid F \subset B^c, F \text{ замкнуто} \},$$

поэтому семейство E замкнуто относительно взятия дополнения. Предположим теперь, что $\{B_n\}$ — последовательность множеств в E . Выберем число $\epsilon > 0$ и множества $F_n \subset B_n \subset G_n$ такие, что F_n — замкнуто, G_n

открыто и $\rho(G_n - F_n) \leq \epsilon/2^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n &= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - F_n) \right] \subset \\ &\subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - F_n) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

откуда

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \leq \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + \epsilon,$$

и так как число ϵ произвольно, то

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \inf\{\rho(G) \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset G, G \text{ открыто}\}.$$

Из соотношения (23) видно также, что

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) + \epsilon,$$

поэтому для достаточно больших N

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \rho\left(\bigcup_{n=1}^N F_n\right) + 2\epsilon.$$

Конечное объединение $\bigcup_{n=1}^N F_n$ является замкнутым подмножеством множества $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, а число ϵ произвольно, поэтому

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sup\{\rho(F) \mid F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, F \text{ замкнуто}\}.$$

Это равенство показывает, что семейство E замкнуто относительно счетных объединений, что и завершает доказательство. $\square$

Из предложения 7.17 видно, что вероятностная мера на метризуемом пространстве полностью определяется своими значениями на открытых или на замкнутых множествах. Следующее предложение содержит похожий результат. Оно устанавливает тот факт, что вероятностная мера ρ на метрическом пространстве (X, d) полностью определяется значениями интегралов $\int g d\rho$, где функция $g \in U_d(X)$.

Предложение 7.18. Пусть X — метризуемое пространство и d — метрика на X , согласованная с его топологией. Если $\rho_1, \rho_2 \in P(X)$ и

$$\int g d\rho_1 = \int g d\rho_2 \quad \forall g \in U_d(X),$$

то $\rho_1 = \rho_2$.

Доказательство. Пусть F — произвольное замкнутое подмножество пространства X , не совпадающее с X . Положим $G_n = \{x \in X \mid d(x, F) < 1/n\}$. Если n достаточно велико, то множества F и G_n^c являются непересекающимися непустыми замкнутыми множествами, для которых $\inf_{x \in F, y \in G_n^c} d(x, y) > 0$, поэтому по лемме 7.1 существуют функции $f_n \in U_d(X)$ такие, что $f_n(x) = 0$ для $x \in G_n^c$, $f_n(x) = 1$ для $x \in F$ и $0 < f_n(x) \leq 1$ для всех $x \in X$. Тогда

$$\rho_1(F) \leq \int f_n d\rho_1 = \int f_n d\rho_2 \leq \rho_2(G_n),$$

и поэтому

$$\rho_1(F) \leq \rho_2\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \rho_2(F).$$

Меняя ролями ρ_1 и ρ_2 , получаем $\rho_1(F) = \rho_2(F)$. Из предложения 7.17 следует, что $\rho_1(B) = \rho_2(B)$ для любого множества $B \in \mathcal{B}_X$. $\square$

7.4.2. Слабая топология

Вернемся теперь к обсуждению топологий в пространстве $P(X)$, где X — метризуемое пространство. Для любых $\epsilon > 0$, $p \in P(X)$ и $f \in C(X)$ определим следующее подмножество пространства $P(X)$:

$$V_\epsilon(p; f) = \{q \in P(X) \mid | \int f dq - \int f dp | < \epsilon\}. \quad (24)$$

Для любого множества $D \subset C(X)$ рассмотрим следующее семейство подмножеств из $P(X)$:

$$V(D) = \{V_\epsilon(p; f) \mid \epsilon > 0, p \in P(X), f \in D\}.$$

Пусть $T(D)$ — слабая топология в пространстве $P(X)$, которая содержит семейство $V(D)$, т.е. топология, для которой $V(D)$ является базой.

Лемма 7.6. Пусть X — метризуемое пространство и множество $D \subset C(X)$. Пусть $\{p_\alpha\}$ — сеть*) в $P(X)$ и $p \in P(X)$. Сходимость $p_\alpha \rightarrow p$ в топологии $T(D)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\int f dp_\alpha \rightarrow \int f dp$ для любой функции $f \in D$.

Доказательство. Предположим, что $p_\alpha \rightarrow p$ и $f \in D$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует индекс β такой, что $p_\alpha \in V_\epsilon(p; f)$ для $\alpha \geq \beta$. Следовательно, $\int f dp_\alpha \rightarrow \int f dp$. Обратно, если $\int f dp_\alpha \rightarrow \int f dp$ для любой функции $f \in D$ и некоторое множество $G \in T(D)$ содержит p , то p содержится также в некотором базисном открытом множестве $\bigcap_{k=1}^n V_{\epsilon_k}(p; f_k) \subset G$, где $\epsilon_k > 0$ и $f_k \in D$, $k = 1, \dots, n$. Выберем индекс β таким, чтобы для всех $\alpha \geq \beta$ мы имели $|\int f_k dp_\alpha - \int f_k dp| < \epsilon_k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $p_\alpha \in G$ для $\alpha \geq \beta$, поэтому $p_\alpha \rightarrow p$. $\square$

В действительности нам нужна топология $T[C(X)]$, так называемая *слабая топология* в пространстве $P(X)$. Пространство $C(X)$ слишком широкое, чтобы с ним было удобно работать, поэтому нам понадобится счетное множество $D \subset C(X)$ такое, что $T(D) = T[C(X)]$. Такое множество строится в следующих трех леммах.

Лемма 7.7. Пусть X — метризуемое пространство и d — метрика в X , согласованная с его топологией. Если функция $f \in C(X)$, то существуют последовательности $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$ в пространстве $U_d(X)$ такие, что $g_n \uparrow f$ и $h_n \downarrow f$.

Доказательство. Достаточно построить только последовательность $\{g_n\}$, так как вторая последовательность получается из первой, если рассмотреть функцию $-f$.

Предлагаемая ниже конструкция используется при более слабых предположениях в лемме 7.14, поэтому будем внимательно следить, какие предположения на самом деле потребуются. Если функция $f \in C(X)$, то она

*) Здесь под сетью понимается отображение в P направленного (иначе — фильтрующего) множества индексов A , т.е. частично упорядоченного множества, такого, что для любого его конечного подмножества $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ найдется элемент $\beta \in A$ с $\alpha_i \leq \beta$, $i = 1, \dots, n$. (Прим. ред.)

ограничена снизу некоторым числом $b \in R$ и $f(x_0) < \infty$ по крайней мере для одной точки $x_0 \in X$. Определим функцию

$$g_n(x) = \inf_{y \in X} [f(y) + nd(x, y)]. \quad (25)$$

Заметим, что

$$b \leq g_n(x) \leq f(x) + nd(x, x) = f(x)$$

и наряду с этим

$$b \leq g_n(x) \leq f(x_0) + nd(x, x_0) < \infty$$

для любого $x \in X$. Таким образом,

$$b \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq f, \quad (26)$$

и каждая функция g_n конечна. Для любых точек $x, y, z \in X$ имеет место неравенство

$$f(y) + nd(x, y) \leq f(y) + nd(z, y) + nd(x, z)$$

и, взяв инфимум сначала от левой, а затем от правой по $y \in X$, получим, что

$$g_n(x) \leq g_n(z) + nd(x, z).$$

Поменяв местами x и z , найдем, что

$$|g_n(x) - g_n(z)| \leq nd(x, z),$$

поэтому $g_n \in U_d(X)$ при всех n . Из неравенств (26) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n \leq f. \quad (27)$$

До сих пор использовался тот факт, что функция f ограничена и не равна тождественно ∞ . Чтобы доказать, что в соотношении (27) выполняется равенство, воспользуемся непрерывностью функции f . Для данных $x \in X$ и $\epsilon > 0$ выберем последовательность $\{y_n\} \subset X$ такую, что

$$f(y_n) + nd(x, y_n) \leq g_n(x) + \epsilon.$$

При $n \rightarrow \infty$ либо $g_n \uparrow \infty$ и тогда в (27) должно быть равенство, либо $y_n \rightarrow x$. В последнем случае имеем

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) + \epsilon, \quad (28)$$

и так как x и ϵ произвольны, то в (27) достигается равенство. $\square$

Лемма 7.8. Пусть X — метризуемое пространство и d — метрика в X , согласованная с его топологией. Тогда $T[C(X)] = T[U_d(X)]$.

Доказательство. Так как $U_d(X) \subset C(X)$, мы имеем $V[U_d(X)] \subset V[C(X)]$ и $T[U_d(X)] \subset T[C(X)]$. Чтобы доказать обратное включение, покажем, что любое множество из $V[C(X)]$ открыто в топологии $T[U_d(X)]$. Таким образом, для произвольных множества $V_\epsilon(p; f) \in V[C(X)]$ и точки p_0 из этого множества мы построим множество из $T[U_d(X)]$, содержащее p_0 и содержащееся в $V_\epsilon(p; f)$.

Пусть заданы множество $V_\epsilon(p; f)$ и точка $p_0 \in V_\epsilon(p; f)$, тогда существует число $\epsilon_0 > 0$, для которого $V_{\epsilon_0}(p_0; f) \subset V_\epsilon(p; f)$. По лемме 7.7 существуют функции g и h из $U_d(X)$ такие, что $g \leq f \leq h$ и

$$\int f d\rho_0 < \int g d\rho_0 + (\epsilon_0/2), \quad \int h d\rho_0 < \int f d\rho_0 + (\epsilon_0/2).$$

Если $q \in V_{\epsilon_0/2}(p_0; g) \cap V_{\epsilon_0/2}(p_0; h)$, то

$$\int f dp_0 < \int g dp_0 + (\epsilon_0/2) < \int g dq + \epsilon_0 \leq \int f dq + \epsilon_0$$

и

$$\int f dq \leq \int h dq < \int h dp_0 + (\epsilon_0/2) < \int f dp_0 + \epsilon_0,$$

поэтому

$$|\int f dq - \int f dp_0| < \epsilon_0.$$

т.е. $q \in V_{\epsilon_0}(p_0; f)$ и множество

$$V_{\epsilon_0/2}(p_0; q) \cap V_{\epsilon_0/2}(p_0; h) \subset V_{\epsilon}(p; f). \square$$

Лемма 7.9. Пусть X — метризуемое пространство и d — метрика в X , согласованная с его топологией. Если множество D всюду плотно в $U_d(X)$, то $T[U_d(X)] = T(D)$.

Доказательство. Очевидно, что $T(D) \subset T[U_d(X)]$. Чтобы доказать обратное включение, выберем множество $V_{\epsilon}(p; g) \in V[U_d(X)]$, точку p_0 в этом множестве, и построим множество из $T(D)$, содержащее p_0 и содержащееся в $V_{\epsilon}(p; g)$. Пусть

$$\epsilon_0 = \epsilon - |\int g dp_0 - \int g dp| > 0.$$

Пусть функция $h \in D$ такая, что $\|g - h\| < \epsilon_0/3$. Тогда для любого $q \in V_{\epsilon_0/3}(p_0; h)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |\int g dq - \int g dp| &\leq |\int g dq - \int h dq| + |\int h dq - \int h dp_0| + \\ &+ |\int h dp_0 - \int g dp_0| + |\int g dp_0 - \int g dp| < \\ &< (\epsilon_0/3) + (\epsilon_0/3) + (\epsilon_0/3) + |\int g dp_0 - \int g dp| = \epsilon, \end{aligned}$$

поэтому $V_{\epsilon_0/3}(p_0; h) \subset V_{\epsilon}(p; g)$. $\square$

Предложение 7.19. Пусть X — сепарабельное метризуемое пространство. Существуют метрика d в X , согласованная с его топологией, и счетное всюду плотное подмножество D из $U_d(X)$ такие, что $T(D)$ является слабой топологией $T[C(X)]$ в пространстве $P(X)$.

Доказательство. Согласно следствию 7.6.1 сепарабельное метризуемое пространство X имеет вполне ограниченную метризацию. В силу предложения 7.9 существует счетное всюду плотное множество D в $U_d(X)$, и требуемое утверждение следует из лемм 7.8 и 7.9. $\square$

Начиная с этого места, для любого метризуемого пространства X будем считать $P(X)$ топологическим пространством со слабой топологией $T[C(X)]$. Мы покажем, что если X сепарабельно и метризуемо, то $P(X)$ тоже сепарабельно и метризуемо; когда X компактно и метризуемо, $P(X)$ тоже компактно и метризуемо; когда X сепарабельно и топологически полно, $P(X)$ сепарабельно и топологически полно, и когда X — борелевское пространство, $P(X)$ тоже борелевское пространство.

Предложение 7.20. Если X — сепарабельное метризуемое пространство, то $P(X)$ тоже сепарабельно и метризуемо.

Доказательство. Пусть d — метрика в X , согласованная с его топологией, и D — счетное всюду плотное подмножество пространства $U_d(X)$ такое, что $T(D)$ совпадает со слабой топологией в пространстве $P(X)$ (см. предложение 7.19). Пусть R^{∞} — произведение счетного числа действительных прямых, и пусть отображение $\varphi: P(X) \rightarrow R^{\infty}$ определяется формулой

$$\varphi(p) = (\int g_1 dp, \int g_2 dp, \dots),$$

где $\{g_1, g_2, \dots\}$ — последовательность всех элементов из D . Покажем, что отображение φ является гомеоморфизмом, а так как пространство R^∞ метризуемо и сепарабельно (предложение 7.4), то отсюда будут следовать требуемые свойства пространства $P(X)$.

Предположим, что $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$, т.е.

$$\int g_k dp_1 = \int g_k dp_2$$

для всех $g_k \in D$. Если $g \in U_d(X)$, существует последовательность $\{g_k\} \subset D$ такая, что $\|g_k - g\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} |\int g dp_1 - \int g dp_2| &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} |\int (g - g_k) dp_1| + \\ &+ \limsup_{k \rightarrow \infty} |\int g_k dp_1 - \int g_k dp_2| + \limsup_{k \rightarrow \infty} |\int (g_k - g) dp_2| \leq \\ &\leq 2 \limsup_{k \rightarrow \infty} \|g_k - g\| = 0, \end{aligned}$$

поэтому,

$$\int g dp_1 = \int g dp_2.$$

Из предложения 7.18 следует, что $p_1 = p_2$, поэтому φ — взаимно однозначное отображение. Отображение $p \rightarrow \int g_k dp$ непрерывно для любой функции $g_k \in D$ по лемме 7.6, поэтому φ непрерывно. Чтобы показать, что непрерывно отображение φ^{-1} , предположим, что $\{p_\alpha\}$ — сеть в $P(X)$, такая, что $\varphi(p_\alpha) \rightarrow \varphi(p)$ для некоторого $p \in P(X)$. Тогда $\int g_k dp_\alpha \rightarrow \int g_k dp$ для всех $g_k \in D$, и, согласно лемме 7.6, $p_\alpha \rightarrow p$. $\square$

Предложение 7.20 гарантирует, что если пространство X — сепарабельно и метризуемо, то топология в пространстве $P(X)$ может быть охарактеризована в терминах сходящихся последовательностей, а не сетей. Дадим несколько условий, эквивалентных сходимости в $P(X)$.

Предложение 7.21. Пусть X — сепарабельное метризуемое пространство, и пусть d — метрика в X , согласованная с его топологией. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность в $P(X)$ и $p \in P(X)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) $p_n \rightarrow p$;
- (б) $\int f dp_n \rightarrow \int f dp$ для всех $f \in C(X)$;
- (в) $\int g dp_n \rightarrow \int g dp$ для всех $g \in U_d(X)$;
- (г) $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n(F) \leq p(F)$ для всех замкнутых множеств $F \subset X$;
- (д) $\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n(G) \geq p(G)$ для всех открытых множеств $G \subset X$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений (а), (б) и (в) следует из лемм 7.6 и 7.8. Эквивалентность (г) и (д) получается переходом к дополнениям.

Чтобы показать, что из (б) следует (г), предположим, что F — замкнутое внутреннее непустое подмножество пространства X , не совпадающее с X , и положим $G_k = \{x \in X \mid d(x, F) < 1/k\}$. Для достаточно больших k , F и G_k^c — непустые непересекающиеся множества; тогда существуют функции $f_k \in C(X)$ такие, что $f_k(x) = 1$ для $x \in F$, $f_k(x) = 0$ для $x \in G_k^c$, и $0 \leq f_k(x) \leq 1$ для всех $x \in X$. Используя утверждение (б), имеем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n(F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_k dp_n = \int f_k dp \leq p(G_k),$$

и, полагая $k \rightarrow \infty$, получаем (г).

Чтобы показать, что из (г) следует (б), выберем $f \in C(X)$ и предположим, не ограничивая общности, что $0 \leq f \leq 1$. Выберем положительное

целое число и определим замкнутые множества

$$F_k = \{x \in X \mid f(x) \geq k/K\}, \quad k = 0, \dots, K.$$

Определим функцию $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ посредством формулы

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^K (k/K) \chi_{F_k - F_{k+1}}(x),$$

где $F_{K+1} = \emptyset$. Тогда $f - (1/K) \leq \varphi \leq f$, и для всех $g \in P(X)$ справедливо равенство

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{k=0}^K (k/K) \mu(F_k - F_{k+1}) = (1/K) \sum_{k=1}^K \mu(F_k).$$

Используя (r), получим, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_n - (1/K) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int \varphi \, d\mu_n = \\ &= (1/K) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \mu_n(F_k) \leq (1/K) \sum_{k=1}^K \mu(F_k) = \int \varphi \, d\mu \leq \int f \, d\mu, \end{aligned}$$

и так как K произвольно, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_n \leq \int f \, d\mu \quad (29)$$

для всех $f \in C(X)$. В частности, неравенство (29) верно и для $-f$, поэтому

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} \int (-f) \, d\mu_n \geq -\int (-f) \, d\mu = \int f \, d\mu. \quad (30)$$

Объединяя неравенства (29) и (30), получаем утверждение (б). $\square$

Если X — метризуемое пространство, то мы обозначаем через ρ_x вероятностную меру на X , которая приписывает единичную массу точке x , так что $\rho_x(B) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in B$.

Следствие 7.21.1. Пусть X — метризуемое пространство. Отображение $\delta: X \rightarrow P(X)$, определенное соотношением $\delta(x) = \rho_x$, является гомеоморфизмом.

Доказательство. Ясно, что δ есть взаимно однозначное отображение. Предположим, что $\{x_n\}$ — последовательность в X и $x \in X$. Если $x_n \rightarrow x$ и G — открытое подмножество пространства X , то имеются две возможности. Либо $x \in G$, в этом случае $x_n \in G$ для достаточно больших n , так что $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_{x_n}(G) = 1 = \rho_x(G)$; либо $x \notin G$, в этом случае $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_{x_n}(G) \geq 0 = \rho_x(G)$. Из предложения 7.21 следует, что $\rho_{x_n} \rightarrow \rho_x$, поэтому отображение δ непрерывно. С другой стороны, если $\rho_{x_n} \rightarrow \rho_x$ и G — открытая окрестность точки x , то, так как $\liminf_{n \rightarrow \infty} \rho_{x_n}(G) \geq \rho_x(G) = 1$, для достаточно больших n должно быть $x_n \in G$, т.е. $x_n \rightarrow x$. Это означает, что отображение δ является гомеоморфизмом. $\square$

Из следствия 7.21.1 видно, что ρ_n может сходиться к ρ так, что в утверждениях (г) и (д) предложения 7.21 выполняются строгие неравенства. Например, пусть множество $G \subset X$ открыто, а точка x лежит на границе G , и пусть x_n сходится к x , оставаясь в G . Тогда $\rho_{x_n}(G) = 1$ для всех n , но $\rho_x(G) = 0$.

Покажем теперь, что компактность X влечет за собой компактность $P(X)$.

Предложение 7.22. Если X — компактное метризуемое пространство, то $P(X)$ также компактное метризуемое пространство.

Доказательство. Если X — компактное метризуемое пространство, то оно сепарабельно (следствие 7.6.2) и пространство $C(X)$ также сепарабельно (теорема 7.7). Пусть $\{f_k\}$ — счетное множество в $C(X)$ такое, что $f_1 \equiv 1$, $\|f_k\| \leq 1$ для всех k , и $\{f_k\}$ всюду плотно в единичной сфере $\{f \in C(X) \mid \|f\| \leq 1\}$. Пусть $[-1, 1]^\infty$ — произведение счетного числа отрезков $[-1, 1]$. Определим отображение $\varphi: P(X) \rightarrow [-1, 1]^\infty$ формулой

$$\varphi(p) = (f_1 dp, f_2 dp, \dots).$$

Простая модификация доказательства предложения 7.20 показывает, что отображение φ является гомеоморфизмом. Покажем, что множество $\varphi[P(X)]$ замкнуто в компактном пространстве $[-1, 1]^\infty$, откуда будет следовать компактность $P(X)$.

Предположим, что $\{p_n\}$ — последовательность в $P(X)$ и $\varphi(p_n) \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in [-1, 1]^\infty$. Для любых числа $\epsilon > 0$ и функции $f \in C(X)$ с $\|f\| \leq 1$ существует функция f_k такая, что $\|f - f_k\| < \epsilon/3$. Найдется также положительное число N такое, что $|f_k dp_n - f_k dp_m| < \epsilon/3$ при $n, m > N$. Тогда

$$\begin{aligned} |f dp_n - f dp_m| &\leq |f dp_n - f_k dp_n| + \\ &+ |f_k dp_n - f_k dp_m| + |f_k dp_m - f dp_m| \leq \epsilon, \end{aligned}$$

поэтому $\{f dp_n\}$ является последовательностью Коши на отрезке $[-1, 1]$. Обозначим ее предел через $E(f)$. Если же $\|f\| > 1$, то определим $E(f)$ формулой $E(f) = \|f\| E(f/\|f\|)$. Легко проверить, что E есть линейный функционал на $C(X)$, что $E(f) \geq 0$ при $f \geq 0$, что $|E(f)| \leq \|f\|$ для всех $f \in C(X)$ и $E(f_1) = 1$.

Предположим, что $\{h_n\}$ — последовательность в $C(X)$ и $h_n(x) \downarrow 0$ для всех $x \in X$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ множество $K_n(\epsilon) = \{x \mid h_n(x) \geq \epsilon\}$ компактно, а $\bigcap_{n=1}^\infty K_n(\epsilon) = \emptyset$. Поэтому $K_n(\epsilon) = \emptyset$ для достаточно больших n , откуда следует, что $\|h_n\| \downarrow 0$. Следовательно, $E(h_n) \downarrow 0$. Это показывает, что функционал E является интегралом Даниэлла, и, согласно известной теореме (см., например, Ройден [70], с. 299, предложение 21), существует единственная вероятностная мера на $\sigma(\bigcup_{f \in C(X)} f^{-1}(B_R))$ такая, что $E(f) = \int f dp$ для всех $f \in C(X)$. Из предложения 7.10 следует, что $p \in P(X)$. Так как

$$\alpha_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_k dp_n = E(f_k) = \int f_k dp, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то $\varphi(p_n) \rightarrow \varphi(p)$. Это доказывает, что $\varphi[P(X)]$ замкнуто. $\square$

Для того чтобы показать, что топологическая полнота и сепарабельность пространства X влекут за собой те же самые свойства для $P(X)$, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.10. Пусть X и Y — сепарабельные метризуемые пространства, и отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом. Тогда отображение $\psi: P(X) \rightarrow P(Y)$, определенное формулой

$$\psi(p)(B) = p[\varphi^{-1}(B)] \quad \forall B \in \mathcal{B}_Y,$$

тоже является гомеоморфизмом.

Доказательство. Предположим, что $p_1, p_2 \in P(X)$ и $p_1 \neq p_2$. Так как p_1 и p_2 — регулярные меры, то существует открытое множество $G \subset X$, для которого $p_1(G) \neq p_2(G)$. Образ $\varphi(G)$ является открытым множеством в индуцированной топологии в пространстве $\varphi(X)$, поэтому $\varphi(G) =$

$= \varphi(X) \cap B$, где B — открытое множество в пространстве Y . Ясно, что $\psi(p_1)(B) = p_1(G) \neq p_2(G) = \psi(p_2)(B)$,

поэтому ψ — взаимно однозначное отображение. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность в пространстве $P(X)$ и $p \in P(X)$. Если $p_n \rightarrow p$, то, так как $\varphi^{-1}(H)$ открыто в X для каждого открытого множества $H \subset Y$, из предложения 7.21 следует, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(p_n)(H) = \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n[\varphi^{-1}(H)] \geq p[\varphi^{-1}(H)] = \psi(p)(H),$$

поэтому $\psi(p_n) \rightarrow \psi(p)$ и отображение ψ непрерывно. Если нам заданы последовательность $\{p_n\}$ и мера p такие, что $\psi(p_n) \rightarrow \psi(p)$, то то же рассуждение, проведенное в обратном направлении, показывает, что $p_n \rightarrow p$ и отображение ψ^{-1} непрерывно. $\square$

Предложение 7.23. Если X — топологически полное сепарабельное пространство, то $P(X)$ — тоже топологически полное и сепарабельное пространство.

Доказательство. Согласно теореме Урысона (предложение 7.2) существует гомеоморфизм $\varphi: X \rightarrow H$, и отображение ψ , получаемое заменой Y на H в лемме 7.10, является гомеоморфизмом из $P(X)$ в $P(H)$. Из теоремы Александера (предложение 7.3) следует, что $\varphi(X)$ является G_δ -множеством пространства H , и легко убедиться, что

$$\psi[P(X)] = \{p \in P(H) \mid p[H - \varphi(X)] = 0\}. \quad (31)$$

Покажем, что $\psi[P(X)]$ является G_δ -множеством компактного пространства $P(H)$ (см. предложение 7.22), и снова, воспользовавшись теоремой Александера, увидим, что $P(X)$ — топологически полное пространство.

Так как $\varphi(X)$ является G_δ -множеством в H , то можно найти открытые множества $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ такие, что $\varphi(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Из соотношения (31) видно, что

$$\begin{aligned} \psi[P(X)] &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{p \in P(H) \mid p(H - G_n) = 0\} = \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{p \in P(H) \mid p(H - G_n) < 1/k\}. \end{aligned}$$

Но для любых замкнутого множества F и действительного числа c множество $\{p \in P(H) \mid p(F) \geq c\}$ замкнуто согласно предложению 7.21 (г), а множество $\{p \in P(H) \mid p(H - G_n) < 1/k\}$ является дополнением такого множества. $\square$

Обратимся теперь к свойствам σ -алгебры $\mathcal{B}_{P(X)}$ в том случае, когда X — метризуемое и сепарабельное пространство. По лемме 7.6 отображение $\theta_f: P(X) \rightarrow R$, задаваемое формулой

$$\theta_f(p) = \int f dp,$$

непрерывно при любой функции $f \in C(X)$. Из предложения 7.21 можно легко получить, что отображение $\theta_B: P(X) \rightarrow [0, 1]$, определенное*) как $\theta_B(p) = p(B)$, измеримо по Борелю, если B — замкнутое подмножество пространства X . (Действительно, в конце доказательства предложения 7.23 мы использовали тот факт, что когда множество B замкнуто, то верхние

*) Использование здесь символа θ_B не совсем корректно. Следуя определению θ_f , правильно было бы записать θ_{χ_B} .

множества уровней $\{p \in P(X) \mid \theta_B(p) \geq c\}$ также замкнуты.) Аналогично, отображение θ_B измеримо по Борелю и когда B открыто. Естественно спросить, является ли отображение θ_B измеримым по Борелю в случае произвольного борелевского множества B ? Ответ на это положителен, и на самом деле $\mathcal{B}_P(X)$ является наименьшей σ -алгеброй, относительно которой отображение θ_B измеримо для любого множества $B \in \mathcal{B}_X$.

При доказательстве этого и последующих результатов оказывается полезным понятие "системы Дынкина".

Определение 7.11. Пусть X — некоторое множество, и $\mathcal{D}$ — какой-то класс подмножеств из X . Мы будем говорить, что $\mathcal{D}$ является *системой Дынкина*, если выполняются следующие условия:

(а) $X \in \mathcal{D}$;

(б) если $A, B \in \mathcal{D}$ и $B \subset A$, то $A - B \in \mathcal{D}$;

(в) если $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ и $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

Предложение 7.24. (теорема о системе Дынкина). Пусть $\mathcal{F}$ — класс подмножеств множества X , замкнутый относительно конечных пересечений. Если $\mathcal{D}$ — система Дынкина, содержащая $\mathcal{F}$, то $\mathcal{D}$ также содержит $\sigma(\mathcal{F})$.

Доказательство. Это — обычный результат теории меры. См., например, Аш [7, с. 169]. $\square$

Предложение 7.25. Пусть X — сепарабельное метризуемое пространство и $\mathcal{E}$ — семейство подмножеств из пространства X , которое порождает σ -алгебру $\mathcal{B}_X$ и замкнуто относительно конечных пересечений. Тогда $\mathcal{B}_P(X)$ является наименьшей σ -алгеброй, относительно которой все функции вида $\theta_E(p) = p(E)$, $E \in \mathcal{E}$ измеримы как отображения из $P(X)$ в $[0, 1]$, т.е.

$$\mathcal{B}_P(X) = \sigma\left[\bigcup_{E \in \mathcal{E}} \theta_E^{-1}(B_R)\right].$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ — наименьшая σ -алгебра, относительно которой все функции θ_E , $E \in \mathcal{E}$, измеримы. Чтобы показать, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}_P(X)$, проверим, что функция θ_B является $\mathcal{B}_P(X)$ -измеримой при каждом $B \in \mathcal{B}_X$. Положим $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}_X \mid \text{функция } \theta_B \text{ является } \mathcal{B}_P(X)\text{-измеримой}\}$. Легко проверить, что $\mathcal{D}$ является системой Дынкина. Мы уже видели, что $\mathcal{D}$ содержит каждое замкнутое множество, поэтому, согласно теореме о системе Дынкина (предложение 7.24), $\mathcal{D} = \mathcal{B}_X$.

Остается показать, что $\mathcal{B}_P(X) \subset \mathcal{F}$. Положим $\mathcal{D}' = \{B \in \mathcal{B}_X \mid \text{функция } \theta_B \text{ является } \mathcal{F}\text{-измеримой}\}$. Как и раньше, $\mathcal{D}'$ — система Дынкина, а так как $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}'$, то $\mathcal{D}' = \mathcal{B}_X$. Таким образом, функция $\theta_f(p) = \int f dp$ является $\mathcal{F}$ -измеримой в том случае, когда f — индикатор борелевского множества. Следовательно, θ_f будет $\mathcal{F}$ -измеримой, когда f является простой борелевской функцией. Если $f \in C(X)$, то существует последовательность простых функций f_n , равномерно ограниченная снизу и такая, что $f_n \uparrow f$. Из теоремы о монотонной сходимости следует, что $\theta_{f_n} \uparrow \theta_f$, поэтому θ_f $\mathcal{F}$ -измерима. Отсюда следует, что для любых $\epsilon > 0$, $p \in P(X)$ и $f \in C(X)$ открытое множество

$$V_\epsilon(p; f) = \{q \in P(X) \mid |\int f dq - \int f dp| < \epsilon\}$$

$\mathcal{F}$ -измеримо. Такие множества образуют подбазу, и, следовательно, $\mathcal{B}_P(X) = \mathcal{F}$ (см. замечание к определению 7.6). $\square$

Следствие 7.25.1. Если X — борелевское пространство, то $P(X)$ также является борелевским пространством.

Доказательство. Пусть φ — гомеоморфное отображение X на борелевское подмножество топологически полного сепарабельного про-

пространства Y . Тогда по лемме 7.10 $P(X)$ гомеоморфно борелевскому множеству $\{p \in P(Y) | p[\varphi(X)] = 1\}$. Так как $P(Y)$ топологически полно и сепарабельно (см. предложение 7.23), то следствие доказано. $\square$

7.4.3. Стохастические ядра

Рассмотрим теперь вероятностные меры на сепарабельном метризуемом пространстве, зависящие от элементов другого сепарабельного метризуемого пространства.

Определение 7.12. Пусть X и Y — сепарабельные метризуемые пространства. *Стохастическим ядром $q(dy | x)$ на Y при условии X^** называется семейство вероятностных мер из пространства $P(Y)$, зависящих от элемента $x \in X$. Если в X дана σ -алгебра F и $\gamma^{-1}[B_P(Y)] \subset F$, где отображение $\gamma: X \rightarrow P(Y)$ определяется формулой

$$\gamma(x) = q(dy | x), \quad (32)$$

то говорят, что ядро $q(dy | x)$ F -измеримо. Если отображение γ непрерывно, то говорят, что ядро $q(dy | x)$ непрерывно.

Предложение 7.26. Пусть X и Y — борелевские пространства, E — семейство подмножеств из Y , порождающее σ -алгебру B_Y , и замкнутое относительно конечных пересечений, а $q(dy | x)$ — стохастическое ядро на Y при условии X . В таком случае $q(dy | x)$ измеримо по Борелю тогда и только тогда, когда отображение $\lambda_E: X \rightarrow [0, 1]$, определяемое формулой $\lambda_E(x) = q(E | x)$, измеримо по Борелю при любом множестве $E \in E$.

Доказательство. Пусть отображение $\gamma: X \rightarrow P(X)$ определяется как $\gamma(x) = q(dy | x)$. Тогда для любого $E \in E$ имеем $\lambda_E = \theta_E \circ \gamma$. Если ядро $q(dy | x)$ измеримо по Борелю (т.е. отображение γ измеримо по Борелю), то в силу предложения 7.25 функция λ_E измерима по Борелю для любого $E \in E$. И наоборот, если функция λ_E измерима по Борелю при каждом $E \in E$, то $\sigma[\bigcup_{E \in E} \lambda_E^{-1}(B_R)] \subset B_X$. Из предложения 7.25 получаем, что

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}[B_P(Y)] &= \gamma^{-1}\left[\sigma\left(\bigcup_{E \in E} \theta_E^{-1}(B_R)\right)\right] = \\ &= \sigma\left[\bigcup_{E \in E} \gamma^{-1}(\theta_E^{-1}(B_R))\right] = \sigma\left[\bigcup_{E \in E} \lambda_E^{-1}(B_R)\right] \subset B_X, \end{aligned}$$

поэтому ядро $q(dy | x)$ измеримо по Борелю. $\square$

Следствие 7.26.1. Пусть X и Y — борелевские пространства и $q(dy | x)$ — измеримое по Борелю стохастическое ядро на Y при условии X . Тогда для любого множества $B \in B_{XY}$ отображение $\Lambda_B: X \rightarrow [0, 1]$, определенное формулой

$$\Lambda_B(x) = q(B_x | x), \quad (33)$$

где $B_x = \{y \in Y | (x, y) \in B\}$, тоже измеримо по Борелю.

Доказательство. Если $B \in B_{XY}$ и $x \in X$, то множество $B_x \subset Y$ гомеоморфно множеству $B \cap [\{x\} \times Y] \in B_{XY}$, откуда следует, что $B_x \in B_Y$, поэтому $q(B_x | x)$ определено. Легко показать, что семейство $D = \{B \in B_{XY} | \text{функция } \Lambda_B \text{ измерима по Борелю}\}$ является системой Дынкина. В силу предложения 7.26 D содержит измеримые прямоугольники, поэтому $D = B_{XY}$. $\square$

* Другое принятое название — *переходная функция* из X в Y . (Прим. ред.)

Покажем, теперь, что вероятностную меру на произведении борелевских пространств можно разложить на частную меру на одном из них и измеримое по Борелю стохастическое ядро. Это разложение возможно, даже если требовать измеримой зависимости ядра от параметров и, как будет показано в главе 10, этот результат является существенным для алгоритма фильтрации в модели динамического программирования с неполной информацией о состоянии.

Для удобства записи будем через X обозначать произвольное борелевское подмножество борелевского пространства X .

Предложение 7.27. Пусть (X, F) — измеримое пространство, Y и Z — борелевские пространства, и пусть $q(dy, z|x)$ — стохастическое ядро на YZ при условии X . Предположим, что функция $q(B|x)$ F -измерима по x при любом множестве $B \in B_{YZ}$. Тогда существуют стохастическое ядро $r(dz|x, y)$ на Z при условии XY и стохастическое ядро $s(dy|x)$ на Y при условии X такие, что $r(Z|x, y) F_{B_Y}$ -измеримо по (x, y) для любых множеств $Z \in B_Z$, $s(Y|x)$ F -измеримо по x для любых множеств $Y \in B_Y$, и

$$q(YZ|x) = \int_Y r(Z|x, y) s(dy|x) \quad \forall Y \in B_Y, Z \in B_Z. \quad (34)$$

Доказательство. Докажем это предложение, считая, что Y и Z несчетны. Если Y или Z или они оба счетны, то в доказательстве необходимы лишь небольшие изменения (фактически упрощения). Благодаря следствию 7.16.1 можно без ограничения общности считать, что $Y = Z = (0, 1]$.

Пусть $s(dy|x)$ является проекцией ядра $q(dy, z|x)$ на Y , т.е. $s(Y|x) = q(YZ|x)$ для каждого $Y \in B_Y$. Для любого положительного целого числа n определим подмножества из Y

$$M(j, n) = (j-1)/2^n, j/2^n], \quad j = 1, \dots, 2^n.$$

Тогда любое множество $M(j, n+1)$ является подмножеством некоторого множества $M(k, n)$, и семейство $\{M(j, n) | n = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, 2^n\}$ порождает σ -алгебру B_Y . Для любой точки $z \in Q \cap Z$ определим величину $q(dy(0, z)|x)$ как меру на Y , значение которой на $Y \in B_Y$ равно $q(Y(0, z)|x)$. Тогда мера $q(dy(0, z)|x)$ абсолютно непрерывна относительно меры $s(dy|x)$ при всех $z \in Q \cap Z$ и $x \in X$. Определим для $z \in Q \cap Z$ функцию

$$G(z|x, y) = \begin{cases} q[M(j, n)(0, z)|x] / s[M(j, n)|x], & \text{если } y \in M(j, n) \text{ и } s[M(j, n)|x] > 0, \\ 0, & \text{если } y \in M(j, n) \text{ и } s[M(j, n)|x] = 0. \end{cases}$$

Функции $G_n(z|x, y)$ можно рассматривать как обобщенные отношения приращений $q(dy(0, z)|x)$ к $s(dy|x)$. Для любой точки z множество

$$B(z) = \{(x, y) \in XY | \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z|x, y) \text{ существует в } R\} =$$

$$= \{(x, y) \in XY | \{G_n(z|x, y)\} - \text{последовательность Коши}\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n, m \geq N} \{(x, y) \in XY | G_n(z|x, y) - G_m(z|x, y) < 1/k\}$$

является F_{B_Y} -измеримым. Теорема 2.5 на с. 612 книги Дуба [28] устанавливает, что

$$s(B(z)_x|x) = 1 \quad \forall x \in X, z \in Q \cap Z,$$

и если мы определим функцию $G(z|x, y)$ формулой

$$G(z|x, y) = \begin{cases} \lim G_n(z|x, y), & \text{если } (x, y) \in B(z), \\ z & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

то будем иметь

$$q[Y(0, z)|x] = \int_X G(z|x, y) s(dy|x), \\ \forall x \in X, z \in Q \cap Z, y \in B_Y. \quad (35)$$

Ясно, что при каждом z функция $G(z|x, y)$ является F_{B_Y} -измеримой по $(x, y)^*$.

Сравнение формул (34) и (35) наводит на мысль, что можно попытаться доопределить функцию $G(z|x, y)$ таким образом, чтобы для любой пары (x, y) $G(z|x, y)$ являлась функцией распределения по z .

С этой целью для каждого $z_0 \in Q \cap Z$ определим множества

$$C(z_0) = \{(x, y) \in XY | \exists z \in Q \cap Z \text{ такое, что } z \leq z_0 \text{ и}$$

$$G(z|x, y) > G(z_0|x, y)\} =$$

$$= \bigcup_{\substack{z \in Q \cap Z \\ z < z_0}} \{(x, y) \in XY | G(z|x, y) > G(z_0|x, y)\},$$

$$C = \bigcup_{z_0 \in Q \cap Z} C(z_0),$$

$$D(z_0) = \{(x, y) \in XY | G(\cdot|x, y) \text{ не является непрерывной справа в точке } z_0\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{z \in Q \cap Z \\ z_0 < z < z_0 + 1/k}} \{(x, y) \in XY | |G(z|x, y) - G(z_0|x, y)| \geq 1/n\},$$

$$D = \bigcup_{z_0 \in Q \cap Z} D(z_0),$$

$$E = \{(x, y) \in XY | G(z|x, y) \text{ не сходится к нулю при } z \downarrow 0\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{z \in Q \cap Z \\ z < 1/k}} \{(x, y) \in XY | |G(z|x, y)| \geq 1/n\}$$

и

$$F = \{(x, y) \in XY | G(1|x, y) \neq 1\}.$$

*) Для читателя, знакомого с мартингалами, приведем доказательство теоремы, на которую только что ссылались.

Фиксируем x и y и заметим, что для $m \geq n$

$$q[M(j, n)(0, z)|x] = \int_{M(j, n)} G_m(z|x, y) s(dy|x). \quad (*)$$

Так как набор множеств $\{M(j, n) | j = 1, \dots, 2^n\}$ является σ -алгеброй, порожденной функцией $G_n(z|x, y)$ аргумента y , то можно заключить, что последовательность $G_n(z|x, y)$, $n = 1, 2, \dots$, является мартингалом на Y относительно меры $s(dy, x)$. Каждое $G_n(z|x, y)$ ограничено сверху числом 1, поэтому по теореме о сходимости мартингалов (см., например, Аш [7, с. 292]) $G_n(z|x, y)$ сходится для почти всех y по мере $s(dy|x)$. Таким образом, $s[B(z)_x|x] = 1$, и возможно данное выше определение $G(z|x, y)$. Чтобы показать, что (35) выполняется для множеств $Y = M(j, n)$, положим в (*) $m \rightarrow \infty$. Семейство множеств Y , для которых выполняется (35), является системой Дынкина, и из предложения 7.24 следует, что соотношение (35) выполняется для всех $y \in B_Y$.

Для фиксированных точек $x \in X$ и $z_0 \in Q \cap Z$ соотношение (35) означает, что если только $z \in Q \cap Z$ и $z \leq z_0$, то

$$\int_Y G(z|x, y) s(dy|x) \leq \int_Y G(z_0|x, y) s(dy|x) \quad \forall Y \in B_Y.$$

Следовательно, $G(z_0|x, y) \leq G(z|x, y)$ при $s(dy|x)$ — почти всех y , поэтому $s[C(z_0)_x|x] = 0$ и

$$s(C_x|x) = 0. \quad (36)$$

Из равенства (36) вытекает, что функция $G(z|x, y)$ не убывает по z при $s(dy|x)$ — почти всех y . Этот факт и соотношение (35) показывают, что

$$\int_Y G(z|x, y) s(dy|x) \downarrow \int_Y G(z_0|x, y) s(dy|x),$$

$$G(z|x, y) \downarrow G(z_0|x, y)$$

при $z \downarrow z_0$ ($z \in Q \cap Z$) для $s(dy|x)$ -почти всех y . Следовательно, $s(D(z_0)_x|x) = 0$ и

$$s(D_x|x) = 0. \quad (37)$$

Из соотношения (35) также следует, что при $z \downarrow 0$ ($z \in Q \cap Z$)

$$\int_Y G(z|x, y) s(dy|x) \downarrow 0 \quad \forall Y \in B_Y.$$

Так как $G(z|x, y)$ не убывает по z для $s(dy|x)$ -почти всех y , то $G(z|x, y) \downarrow 0$ при $s(dy|x)$ -почти всех y , т.е.

$$s(E_x|x) = 0. \quad (38)$$

Подставляя в (35) $z = 1$, получим, что

$$\int_Y G(1|x, y) s(dy|x) = s(Y|x) \quad \forall Y \in B_Y,$$

поэтому $G(1|x, y) = 1$ для $s(dy|x)$ -почти всех y , т.е.

$$s(F_x|x) = 0. \quad (39)$$

Выберем в $Q \cap Z$ такую последовательность $\{z_n\}$, что $z_n \downarrow z$ для любого $z \in Z$, и для любых точек $x \in X$, $y \in Y$ положим

$$F(z|x, y) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} G(z_n|x, y), & \text{если } (x, y) \in XY - (C \cup D \cup E \cup F), \\ z & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (40)$$

Если $(x, y) \in XY - (C \cup D \cup E \cup F)$, то $G(z|x, y)$ является неубывающей непрерывной справа функцией по $z \in Q \cap Z$, поэтому функция $F(z|x, y)$ вполне определена, не убывает и непрерывна справа. Для всех точек $(x, y) \in XY$ выполняются также соотношения

$$0 \leq F(z|x, y) \leq 1 \quad \forall z \in Z,$$

$$F(1|x, y) = 1, \quad \lim_{z \downarrow 0} F(z|x, y) = 0.$$

Согласно известному в теории вероятностей результату (Аш [7, с. 24]) для любой точки (x, y) существует вероятностная мера $r(dz|x, y)$ на Z такая, что

$$r([0, z]|x, y) = F(z|x, y) \quad \forall z \in [0, 1].$$

Семейство подмножеств $\underline{Z} \in B_Z$, для которых мера $r(\underline{Z}|x, y)$ является FB_Y -измеримой по (x, y) , образует систему Дынкина, которая содержит множества $\{(0, z) | z \in Z\}$, поэтому мера $r(\underline{Z}|x, y)$ FB_Y -измерима для всех $\underline{Z} \in B_Z$.

Соотношения (35) – (40) и теорема о монотонной сходимости позволяют заключить, что

$$\begin{aligned} q[\underline{Y}(0, z) | x] &= \int_Y F(z | x, y) s(dy | x) = \\ &= \int_Y r((0, z) | x, y) s(dy | x) \quad \forall x \in X, \underline{Y} \in B_Y. \end{aligned} \quad (41)$$

Семейства подмножеств $\underline{Z} \in B_Z$, для которых выполняется соотношение (34), образуют систему Дынкина, содержащую множества $\{(0, z) | z \in Z\}$, поэтому соотношение (34) выполняется для всех $\underline{Z} \in B_Z$. $\square$

Если $F = B_X$, то, применяя предложение 7.26, получаем следующую модификацию предложения 7.27.

Следствие 7.27.1. Пусть X, Y и Z – борелевские пространства, и пусть $q(dy, z) | x$ – измеримое по Борелю стохастическое ядро на YZ при условии X . Тогда существуют измеримые по Борелю стохастические ядра $r(dz | x, y)$ на Z при условии XY и $s(dy | x)$ на Y при условии X такие, что выполняется соотношение (34).

Если в следствии 7.27.1 нет зависимости от параметра x , то получается следующий хорошо известный результат для борелевских пространств.

Следствие 7.27.2. Пусть Y и Z – борелевские пространства и $q \in P(YZ)$. Тогда существует измеримое по Борелю стохастическое ядро $r(dz | y)$ на Z при условии Y такое, что

$$q(\underline{YZ}) = \int_Y r(\underline{Z} | y) s(dy) \quad \forall \underline{Y} \in B_Y, \underline{Z} \in B_Z,$$

где s – проекция меры q на Y .

7.4.4. Интегрирование

Как и в разделе 2.1, будем считать, что

$$-\infty + \infty = +\infty - \infty = \infty. \quad (42)$$

Тогда для любых чисел $a, b, c \in R^*$ выполняется ассоциативный закон так как, если какое-нибудь из чисел a, b, c равно ∞ , то обе части в (42) также равны ∞ ; если же ни одно из чисел a, b, c не равно ∞ , то применима обычная арифметика, включающая конечные числа и $-\infty$. Также, если $a, b, c \in R^*$ и $a + b = c$, то $a = c - b$ при условии, что $b \neq \pm\infty$. Тем не менее всегда остается верным, что если $a + b \leq c$, то $a \leq c - b$.

Соглашение (42) используем для того, чтобы расширить определение интеграла. Если X – метризуемое пространство, $p \in P(X)$ и функция $f: X \rightarrow R^*$ измерима по Борелю, то определим интеграл формулой

$$\int f dp = \int f^+ dp - \int f^- dp. \quad (43)$$

Заметим, что если $\int f^+ dp < \infty$ или $\int f^- dp < \infty$, то формула (43) сводится к классическому определению $\int f dp$.

В следующей лемме приводятся некоторые свойства интеграла в таком расширенном смысле.

Лемма 7.11. Пусть X – метризуемое пространство, и пусть задана мера $p \in P(X)$. Пусть f, g и $f_n, n = 1, 2, \dots$, – измеримые по Борелю действительные функции на X , принимающие значения из $[-\infty, +\infty]$.

(а) Используя (42) для определения суммы $f + g$, имеем

$$\int (f + g) dp \leq \int f dp + \int g dp. \quad (44)$$

(6) Если выполняется одно из трех условий

$$(61) \int f^+ dp < \infty \text{ и } \int g^+ dp < \infty,$$

$$(62) \int f^- dp < \infty \text{ и } \int g^- dp < \infty,$$

$$(63) \int g^+ dp < \infty \text{ и } \int g^- dp < \infty, \text{ то}$$

$$\int (f + g) dp = \int f dp + \int g dp. \quad (45)$$

(в) Если $0 < \alpha < \infty$, то $\int (\alpha f) dp = \alpha \int f dp$.

(г) Если $f \leq g$, то $\int f dp \leq \int g dp$.

(д) Если $f_n \uparrow f$ и $\int f_1 dp > -\infty$, то $\int f_n dp \uparrow \int f dp$.

(е) Если $f_n \downarrow f$ и $\int f_1 dp < \infty$, то $\int f_n dp \downarrow \int f dp$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение (6), а затем вернемся к утверждению (а). При предположении (61) имеем $f(x) < \infty$ и $g(x) < \infty$ для p -почти всех x , поэтому сумма $f(x) + g(x)$ может быть определена без обращения к соглашению (42) для p -почти всех x . Более того, $\int f dp < \infty$ и $\int g dp < \infty$, поэтому равенство (45) следует из теоремы сложения классической теории интеграла Аш [7, с. 45]).

Доказательство равенства (45) при предположении (62) аналогично.

При предположении (63) или $\int f^+ dp = \infty$ в этом случае обе части в формуле (45) равны ∞ , или $\int f^+ dp < \infty$, а в этом случае выполнено предположение (61). Возвращаясь к утверждению (а), заметим, что если выполнено предположение (61), то из (45) следует (44). Если предположение (61) не выполняется, то

$$\int f dp + \int g dp = \infty,$$

так что (44) снова выполнено.

Утверждения (в) и (г) представляют собой простые следствия соотношений (42) и (43).

Утверждение (д) следует из обобщенной теоремы о монотонной сходимости (Аш [7, с. 47*]) в случае, если $\int f_1^- dp < \infty$. Если же $\int f_1^- dp = \infty$, то $\int f_1 dp > -\infty$ означает, что $\int f_1^+ dp = \int f_1 dp = \infty$, и требуемое соотношение следует из (г).

Утверждение (е) следует из обобщенной теоремы о монотонной сходимости. $\square$

Как было показано в следствии 7.27.2, вероятностная мера на произведении борелевских пространств может быть разложена на частную меру и стохастическое ядро. Этот процесс можно обратить, т.е. для любой вероятностной меры и одного или нескольких измеримых по Борелю стохастических ядер на борелевских пространствах можно на произведении пространств построить единственную вероятностную меру.

Предложение 7.28. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность борелевских пространств, $Y_n = X_1 X_2 \dots X_n$ и $Y = X_1 X_2 \dots$. Пусть задана мера $p \in P(X)$, и пусть $q_n(dx_{n+1} | y_n)$ — борелевски измеримое стохастическое ядро на X_{n+1} при условии Y_n , $n = 1, 2, \dots$. Тогда для $n = 2, 3, \dots$ существует единственная вероятностная мера $r_n \in P(Y_n)$ такая, что

$$\begin{aligned} r_n(\underline{X}_1 \underline{X}_2 \dots \underline{X}_n) &= \int_{\underline{X}_1} \int_{\underline{X}_2} \dots \int_{\underline{X}_{n-1}} q_{n-1}(\underline{X}_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \times \\ &\times q_{n-2}(dx_{n-1} | x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \dots \times \\ &\times q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1) \quad \forall \underline{X}_1 \in B_{X_1}, \dots, \underline{X}_n \in B_{X_n}. \end{aligned} \quad (46)$$

*) Или см. Неве [96], предложение II.3.3 (Прим. ред.).

Если функция $f: Y_n \rightarrow R^*$ борелевски измерима и либо $\int f^+ dr_n < \infty$, либо $\int f^- dr_n < \infty$, то

$$\int_{Y_n} f dr_n = \int_{X_1} \int_{X_2} \dots \int_{X_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ \times q_{n-1}(dx_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \dots q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1). \quad (47)$$

Более того, существует единственная вероятностная мера r на $Y = X_1 X_2 \dots$ такая, что для каждого n проекция r на Y_n равна r_n .

Доказательство. Пространства Y_n , $n = 2, 3, \dots$, и Y — борелевские в силу предложения 7.13. Если существует мера $r_n \in P(Y_n)$, удовлетворяющая соотношению (46), то она должна быть единственной. В самом деле, предположим, что мера $r'_n \in P(Y_n)$ также удовлетворяет соотношению (46). Семейство $D = \{B \in \mathcal{B}_{Y_n} | r_n(B) = r'_n(B)\}$ является системой Дынкина, которая содержит измеримые прямоугольники, поэтому $D = \mathcal{B}_{Y_n}$ и $r_n = r'_n$.

Существование r_n установим по индукции, проверив сначала случай $n=2$. Для $B \in \mathcal{B}_{Y_2}$ воспользуемся следствием 7.26.1, чтобы определить меру

$$r_2(B) = \int_{X_1} q_1(B_{x_1} | x_1) p(dx_1). \quad (48)$$

Легко проверить, что $r_2 \in P(Y_2)$ и что r_2 удовлетворяет соотношению (46). Если f является индикатором множества $B \in \mathcal{B}_{Y_2}$, то интеграл $\int_{X_2} f(x_1, x_2) q(dx_2 | x_1)$ измерим по Борелю по x_1 , и из (48) получаем

$$\int_{Y_2} f dr_2 = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1). \quad (49)$$

Ввиду линейности интеграла равенство (49) выполняется и для простых измеримых по Борелю функций.

Если функция $f: Y_2 \rightarrow [0, \infty]$ измерима по Борелю, то существует возрастающая последовательность простых функций, таких, что $f_n \uparrow f$. По теореме о монотонной сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_2} f_n(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) \quad \forall x_1 \in X_1,$$

поэтому интеграл $\int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1)$ измерим по Борелю и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Y_2} f_n dr_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_1} \int_{X_2} f_n(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1) = \\ = \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1).$$

Но $\int_{Y_2} f_n dr_2 \uparrow \int_{Y_2} f dr_2$, поэтому равенство (49) справедливо для любых измеримых по Борелю неотрицательных функций.

Для измеримых по Борелю функций $f: Y_2 \rightarrow R^*$, удовлетворяющих условию $\int f^+ dr_2 < \infty$ или $\int f^- dr_2 < \infty$, имеем

$$\int_{Y_2} f^+ dr_2 = \int_{X_1} \int_{X_2} f^+(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1)$$

и

$$\int_{Y_2} f^- dr_2 = \int_{X_1} \int_{X_2} f^-(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) p(dx_2).$$

Предположим для определенности, что $\int_{Y_2} f^- dr_2 < \infty$. Тогда функции

$$\int_{X_2} f^+(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1),$$

$$-\int_{X_2} f^-(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1)$$

удовлетворяют условию (62) леммы 7.11, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{Y_2} f dr_2 &= \int_{Y_2} f^+ dr_2 - \int_{Y_2} f^- dr_2 = \\ &= \int_{X_1} \left[\int_{X_2} f^+(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) - \int_{X_2} f^-(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) \right] p(dx_1) = \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1), \end{aligned}$$

где последний шаг есть прямой результат определения интеграла $\int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2 | x_1)$.

Предположим теперь, что существует мера $r_k \in P(Y_k)$, для которой равенства (46) и (47) выполняются при $n = k$. Для $B \in Y_{k+1}$ положим

$$r_{k+1}(B) = \int_{Y_k} q_k(B_{y_k} | y_k) r_k(dy_k).$$

Тогда $r_{k+1} \in P(Y_{k+1})$. Если $B = X_1 X_2 \dots X_k X_{k+1}$, где $X_j \in B_{X_j}$, то из соотношения (47) при $n = k$ получим

$$\begin{aligned} r_{k+1}(B) &= \int_{X_1, X_2, \dots, X_k} (y_k) q_k(X_{k+1} | y_k) r_k(dy_k) = \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} \dots \int_{X_k} q_k(X_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k) q_{k-1}(dx_k | x_{k-1}) \dots \times \\ &\times q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1). \end{aligned} \quad (50)$$

Это доказывает формулу (46) для $n = k + 1$.

Воспользовавшись теперь формулой (50), можно доказать соотношение (47) для случая, когда $n = k + 1$ и f является индикатором множества. Как и ранее, этот результат можно обобщить на случай функции $f: Y_{k+1} \rightarrow [0, \infty]$. Если функция $f: Y_{k+1} \rightarrow R^+$ измерима по Борелю и либо $\int f^+ dr_{k+1} < \infty$, либо $\int f^- dr_{k+1} < \infty$, то из справедливости соотношения (47) для неотрицательных функций и предположения индукции вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{Y_{k+1}} f^+ dr_{k+1} &= \int_{X_1} \int_{X_2} \dots \int_{X_{k+1}} f^+(x_1, \dots, x_{k+1}) \times \\ &\times q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k) \dots q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1) = \\ &= \int_{X_1 \dots X_k} \int_{X_{k+1}} f^+(x_1, \dots, x_{k+1}) q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k) dr_k \end{aligned}$$

и точно так же

$$\int_{Y_{k+1}} f^- dr_{k+1} = \int_{X_1 \dots X_k} \int_{X_{k+1}} f^-(x_1, \dots, x_{k+1}) q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k) dr_k.$$

Предположим для определенности, что $\int Y_{k+1} f^- dr_{k+1} < \infty$. Тогда функции

$$\int_{X_{k+1}} f^+(x_1, \dots, x_{k+1}) q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k)$$

и

$$-\int_{X_{k+1}} f^-(x_1, \dots, x_{k+1}) q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k)$$

удовлетворяют условиям (62) леммы 7.11, поэтому, как и ранее,

$$\int_{Y_{k+1}} f dr_{k+1} = \int_{X_1} \dots \int_{X_k} \int_{X_{k+1}} f(x_1, \dots, x_{k+1}) q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k) dr_k. \quad (51)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \left[\int_{X_{k+1}} f(x_1, \dots, x_{k+1}) q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k) \right]^+ \leq \\ & \leq \int_{X_{k+1}} f^+(x_1, \dots, x_{k+1}) q_k(dx_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k), \end{aligned}$$

то мы можем применить предположение индукции к правой части равенства (51) для того, чтобы убедиться в справедливости соотношения (47) в общем случае.

Чтобы установить существование единственной вероятностной меры $r \in P(Y)$, проекция которой на Y_n равна r_n , $n = 2, 3, \dots$, заметим, что меры r_n согласованы, т.е. если $m \geq n$, то проекция r_m на Y_n равна r_n . Если каждое из пространств X_k является полным, теорема Колмогорова о продолжении меры (см., например, Аш [7 с. 191] *) гарантирует существование единственной меры $r \in P(Y)$, проекция которой на каждое из пространств Y_n равна r_n . Если X_k неполно, то оно может быть гомеоморфно погружено, как борелевское подмножество, в полное сепарабельное метрическое пространство $\tilde{X}_k$.

Как и в предложении 7.13, каждое пространство Y_n гомеоморфно борелевскому подмножеству полного сепарабельного метрического пространства $\tilde{Y}_n = \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \dots \tilde{X}_n$ и Y гомеоморфно борелевскому подмножеству полного сепарабельного метрического пространства $\tilde{Y} = \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \dots$. Всякая мера $r_n \in P(Y_n)$ может быть отождествлена с мерой $\tilde{r}_n \in P(\tilde{Y}_n)$, как это сделано в лемме 7.10, и, используя теорему Колмогорова о продолжении, мы устанавливаем существование единственной меры $\tilde{r} \in P(\tilde{Y})$, проекция которой на каждое $\tilde{Y}_n$ равна $\tilde{r}_n$. Непосредственно устанавливается, что $\tilde{r}$ приписывает вероятность, равную единице, образу пространства Y в $\tilde{Y}$, поэтому $\tilde{r}$ соответствует некоторой мере $r \in P(Y)$, проекция которой на каждом Y_n равна r_n . Единственность $\tilde{r}$ означает единственность r . $\square$

В ходе доказательства предложения 7.28 был также доказан следующий результат.

Предложение 7.29. Пусть X и Y — борелевские пространства, и пусть $q(dy|x)$ — измеримое по Борелю стохастическое ядро на Y при условии X .

*) Или см. Колмогоров [93], гл. III, § 4, основная теорема, где соответствующий результат доказан для мер на R^∞ . Ввиду изоморфизма борелевских пространств (см. следствие 7.16.1) этот случай достаточен для доказательства предложения 7.28. Отметим, что теорема о построении меры в счетном произведении пространств по стохастическим ядрам (в отличие от обратной теоремы о разложении — см. следствие 7.27.2) доказывается для произвольных измеримых, а не только борелевских пространств. См., например, Неве [96], гл. V, теорема Йонеску Тулча. (Прим. ред.)

Если функция $f: XY \rightarrow R^*$ измерима по Борелю, то функция $\lambda: X \rightarrow R^*$, определенная формулой

$$\lambda(x) = \int f(x, y) q(dy|x), \quad (52)$$

также измерима по Борелю.

Следствие 7.29.1. Пусть X — борелевское пространство, и пусть функция $f: X \rightarrow R^*$ измерима по Борелю. Тогда функция $\theta_f: P(X) \rightarrow R^*$, определенная формулой

$$\theta_f(p) = \int f dp,$$

также измерима по Борелю.

Доказательство. Определим измеримое по Борелю стохастическое ядро на X при условии $P(X)$ как $q(dx|p) = p(dx)$. Определим функцию $\tilde{f}: P(X) \times X \rightarrow R^*$ формулой $\tilde{f}(p, x) = f(x)$. Тогда функция

$$\theta_f(p) = \int f(x) p(dx) = \int \tilde{f}(p, x) q(dx, p)$$

измерима по Борелю, согласно предложению 7.29. $\square$

Если функция $f \in C(XY)$ и стохастическое ядро $q(dy|x)$ непрерывны, то отображение λ , задаваемое формулой (52), также непрерывно. Докажем это с помощью следующей леммы.

Лемма 7.12. Пусть X и Y — сепарабельные метризуемые пространства. Тогда отображение $\sigma: P(X) \times P(Y) \rightarrow P(XY)$, определенное формулой $\sigma(p, q) = pq$, где pq — произведение мер p и q , непрерывно.

Доказательство. Используем теорему Урысона (предложение 7.2), чтобы гомеоморфно погрузить X и Y в куб Гильберта, и для простоты обозначений будем считать X и Y подмножествами пространства $\mathbb{H}$. Пусть d является метрикой в $\mathbb{H}$, согласованной с его топологией. Если $g \in U_d(XY)$, то в силу леммы 7.3 функция g может быть продолжена на функцию $\hat{g} \in C(\mathbb{H}\mathbb{H})$. Множество конечных линейных комбинаций вида $\sum_{j=1}^k \hat{f}_j(x) \hat{h}_j(y)$, где $\hat{f}_j$ и $\hat{h}_j$ принимают значения из $C(\mathbb{H})$ и k пробегает натуральный ряд чисел, представляет собой алгебру, которая разделяет точки в $\mathbb{H}\mathbb{H}$, так что для любого $\epsilon > 0$ в силу теоремы Стоуна—Вейерштрасса может быть выбрана такая линейная комбинация, которая удовлетворяет неравенству $\|\sum_{j=1}^k \hat{f}_j \hat{h}_j - \hat{g}\| < \epsilon$. Если $\{p_n\}$ — последовательность в $P(X)$, сходящаяся к мере $p \in P(X)$, и $\{q_n\}$ — последовательность в $P(Y)$, сходящаяся к мере $q \in P(Y)$, а функции f_j и h_j являются ограничениями функций $\hat{f}_j$ и $\hat{h}_j$ соответственно на X и Y , то

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{XY} g d(p_n q_n) - \int_{XY} g d(pq) \right| \leq \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{XY} \left(g - \sum_{j=1}^k f_j h_j \right) d(p_n q_n) \right| + \\ & + \sum_{j=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_X f_j dp_n \int_Y h_j dq_n - \int_X f_j dp \int_Y h_j dq \right| + \\ & + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{XY} \left(\sum_{j=1}^k f_j h_j - g \right) d(pq) \right| \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Непрерывность отображения σ следует из эквивалентности утверждений (а) и (б) в предложении 7.21. $\square$

Предложение 7.30. Пусть X и Y — сепарабельные метризуемые пространства, и пусть $q(dy|x)$ — непрерывное стохастическое ядро на Y при условии X . Если функция $f \in C(XY)$, то функция $\lambda: X \rightarrow R$, определенная формулой

$$\lambda(x) = \int f(x, y) q(dy|x),$$

непрерывна.

Доказательство. Отображение $\nu: X \rightarrow P(XY)$, определенное как $\nu(x) = p_x q(dy|x)$, непрерывно в силу следствия 7.21.1 и леммы 7.12. Имеем $\lambda(x) = (\theta_f \circ \nu)(x)$, где функция $\theta_f: P(XY) \rightarrow R$ равна $\theta_f(r) = \int f dr$. Согласно предложению 7.21, функция θ_f непрерывна. Следовательно, непрерывна и λ . $\square$

7.5. Полунепрерывные функции и измеримый по Борелю выбор

В алгоритме динамического программирования, определяемом формулами (17) и (18) главы 1, многократно повторяются три операции. Сперва производится оценка условного математического ожидания. Затем ищется нижняя грань действительной функции двух переменных (состояние и управление) по одной из этих переменных (управление). И наконец, чтобы построить оптимальную или почти оптимальную стратегию, нужно выбрать "селектор", который отображает каждое состояние в то управление, при котором достигается или почти достигается инфимум, определенный на втором шаге. В этом разделе приводятся результаты, из которых будет следовать, что при определенных условиях рассматриваемые функции со значениями в $[-\infty, +\infty]$ являются полунепрерывными и что селекторы могут быть выбраны измеримыми по Борелю. Эти результаты применяются к динамическому программированию в предложениях 8.6, 8.7 и следствиях 9.17.2, 9.17.3.

Определение 7.13. Пусть X — метризуемое пространство и f — действительная функция на X , принимающая значения из $[-\infty, +\infty]$. Если множество $\{x \in X | f(x) \leq c\}$ замкнуто при каждом $c \in R$, то говорят, что функция f полунепрерывна снизу. Если множество $\{x \in X | f(x) \geq c\}$ замкнуто при каждом $c \in R$, то говорят, что функция f полунепрерывна сверху.

Заметим, что функция f полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда $-f$ полунепрерывна сверху. Эта двойственность позволяет любой результат о полунепрерывных снизу функциях переформулировать как аналогичный результат о полунепрерывных сверху функциях, и будет использоваться в последующих доказательствах. Заметим также, что если функция f полунепрерывна снизу, то множества $\{x \in X | f(x) = -\infty\}$ и $\{x \in X | f(x) \leq \infty\}$ замкнуты, так как первое из них равно $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X | f(x) \leq -n\}$, а второе совпадает с X . Аналогичный результат имеет место для полунепрерывных сверху функций. Следующая лемма дает другое возможное определение полунепрерывных сверху или снизу функций.

Лемма 7.13. Пусть X — метризуемое пространство, и пусть дана функция $f: X \rightarrow R^*$.

(а) Функция f полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к точке $x \in X$, имеет место неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x). \quad (53)$$

(б) Функция f полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, сходящейся к точке $x \in X$, имеет место

неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x).$$

(54)

Доказательство. Предположим, что функция f полунепрерывна снизу, и пусть $x_n \rightarrow x$. Можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Для любого $\epsilon > 0$ определим функцию

$$\theta(\epsilon) = \begin{cases} \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \epsilon, & \text{если } \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) > -\infty, \\ -1/\epsilon & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда существует положительное целое число $k(\epsilon)$ такое, что $f(x_{n_k}) \leq \theta(\epsilon)$ для всех $k \geq k(\epsilon)$. Множество $\{y \in X | f(y) \leq \theta(\epsilon)\}$ замкнуто и, следовательно, содержит точку x . Отсюда вытекает неравенство (53). Обратно, если выполняется неравенство (53) и для некоторого $c \in R$ $\{x_n\}$ является последовательностью в множестве $\{y \in X | f(y) \leq \theta(\epsilon)\}$, сходящейся к точке x , то $f(x) \leq c$, так что функция f полунепрерывна снизу.

Утверждение (б) следует из двойственности, упомянутой ранее. $\square$

Если функции f и g полунепрерывны снизу и ограничены снизу на X , а $x_n \rightarrow x$, то

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) + g(x_n)] &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \\ &+ \liminf_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \geq f(x) + g(x), \end{aligned}$$

поэтому функция $f + g$ полунепрерывна снизу. Так же, если функция f полунепрерывна снизу и число $\alpha > 0$, то функция αf полунепрерывна снизу. Функции, полунепрерывные сверху, обладают аналогичными свойствами.

Из неравенств (53) и (54) видно, что функция $f: X \rightarrow R^*$ непрерывна тогда и только тогда, когда она полунепрерывна и сверху и снизу. С помощью приведенной ниже леммы часто удается выводить свойства полунепрерывных функций из свойств непрерывных функций.

Лемма 7.14. Пусть X — метризуемое пространство и задана функция $f: X \rightarrow R^*$.

(а) Функция f полунепрерывна и ограничена снизу тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n\} \subset C(X)$ такая, что $f_n \uparrow f$.

(б) Функция f полунепрерывна и ограничена сверху тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n\} \subset C(X)$ такая, что $f_n \downarrow f$.

Доказательство. Докажем только утверждение (а), из двойственности будет вытекать (б). Предположим, что функция f полунепрерывна снизу и ограничена снизу числом $b \in R$, и пусть d — метрика в X , согласованная с его топологией. Можно предположить, без ограничения общности, что $f(x_0) < \infty$ в некоторой точке $x_0 \in X$, так как иначе результат тривиален. (Можно взять, например, $f_n(x) = n$ для всех $x \in X$.)

Как и в лемме 7.7, определим функцию

$$g_n(x) = \inf_{y \in X} [f(y) + nd(x, y)].$$

Точно так же, как при доказательстве леммы 7.7, показывается, что $\{g_n\}$ —

возрастающая последовательность непрерывных функций, ограниченных снизу числом b и сверху функцией f . Чтобы доказать, что $g_n \uparrow f$, вместо непрерывности можно использовать свойство (53) полунепрерывных снизу функций. В частности, соотношение (28) принимает вид

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) + \epsilon.$$

Определим теперь функции $f_n = \min\{n, g_n\}$. Любая функция f_n непрерывна и ограничена, и $f_n \uparrow f$. Это заканчивает доказательство прямого утверждения.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим любую последовательность $\{f_n\} \subset C(X)$ с $f_n \uparrow f$. Ясно, что множество

$$\{x \in X \mid f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \leq c\}$$

замкнуто для любого $c \in R$. $\square$

Следующее предложение показывает, что полунепрерывность функции двух переменных сохраняется при интегрировании одной из переменных по непрерывному стохастическому ядру.

Предложение 7.31. Пусть X и Y — сепарабельные метризуемые пространства, $q(dy|x)$ — непрерывное стохастическое ядро на Y при условии X , и пусть функция $f: XY \rightarrow R^*$ измерима по Борелю. Положим

$$\lambda(x) = \int f(x, y) q(dy|x).$$

(а) Если функция f полунепрерывна снизу и ограничена снизу, то и функция λ полунепрерывна снизу и ограничена снизу.

(б) Если функция f полунепрерывна сверху и ограничена сверху, то и функция λ полунепрерывна сверху и ограничена сверху.

Доказательство. Докажем часть (а) утверждения; часть (б) получается в силу двойственности. Если функция $f: XY \rightarrow R^*$ полунепрерывна и ограничена снизу, то, согласно лемме 7.14, существует последовательность $\{f_n\} \subset C(XY)$ такая, что $f_n \uparrow f$. Определим функции $\lambda_n(x) = \int f_n(x, y) q(dy|x)$. Из предложения 7.30 следует, что функции λ_n непрерывны и по теореме о монотонной сходимости $\lambda_n \uparrow \lambda$. По лемме 7.14 функция λ полунепрерывна снизу. $\square$

Важной операцией при выполнении алгоритма динамического программирования является нахождение инфимума функции двух переменных. В условиях полунепрерывности имеем следующий результат, относящийся к этой операции.

Предложение 7.32. Пусть X и Y — метризуемые пространства, и пусть задана функция $f: XY \rightarrow R^*$. Определим функцию

$$f^*(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y). \quad (55)$$

(а) Если функция f полунепрерывна снизу и Y компактно, то функция f^* полунепрерывна снизу и для любого $x \in X$ инфимум в (55) достигается при некотором $y \in Y$.

(б) Если функция f полунепрерывна сверху, то функция f^* также полунепрерывна сверху.

Доказательство.

(а) Фиксируем точку x и рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset Y$ такую, что $f(x, y_n) \downarrow f^*(x)$. Тогда $\{y_n\}$ имеет точку накопления $y_0 \in Y$ и из леммы 7.13 (а) следует, что $f(x, y_0) = f^*(x)$. Чтобы показать, что функ-

ция f^* полунепрерывна снизу, выберем последовательность $\{x_n\} \subset X$ такую, что $x_n \rightarrow x_0$. Пусть последовательность $\{y_n\} \subset Y$ такова, что

$$f(x_n, y_n) = f^*(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Существует подпоследовательность последовательности $\{(x_n, y_n)\}$, назовем ее (x_{n_k}, y_{n_k}) , такая, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k})$. Последовательность $\{y_{n_k}\}$ имеет предельную точку $y_0 \in Y$, и по лемме 7.13 (а)

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} f^*(x_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) \geq f(x_0, y_0) \geq f^*(x_0), \end{aligned}$$

поэтому функция f^* полунепрерывна снизу.

(б) Пусть d_1 и d_2 — метрики в X и в Y , согласованные с их топологиями. Если $G \subset XY$ — открытое множество и точка $x_0 \in \text{proj}_X(G)$, то найдется некоторая точка $y_0 \in Y$, для которой $(x_0, y_0) \in G$, и найдется число $\epsilon > 0$ такое, что

$$N_\epsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in XY \mid d_1(x, x_0) < \epsilon, d_2(y, y_0) < \epsilon\} \subset G.$$

Тогда

$$x_0 \in \text{proj}_X[N_\epsilon(x_0, y_0)] = \{x \in X \mid d_1(x, x_0) < \epsilon\} \subset \text{proj}_X(G),$$

поэтому множество $\text{proj}_X(G)$ открыто в X . Для любого числа $c \in \mathbb{R}$ имеем

$$\{x \in X \mid f^*(x) < c\} = \text{proj}_X(\{(x, y) \in XY \mid f(x, y) < c\}).$$

Из полунепрерывности сверху функции f следует, что множество $\{(x, y) \mid f(x, y) < c\}$ открытое, поэтому множество $\{x \in X \mid f^*(x) < c\}$ открыто и функция f^* полунепрерывна сверху. $\square$

Следующая важная операция алгоритма динамического программирования — выбор измеримого "селектора", который ставит в соответствие каждой точке $x \in X$ точку $y \in Y$, в которой достигается или почти достигается инфимум в (55). Обсудим сначала измеримый по Борелю выбор для случая (а) предложения 7.32. Для этого нам потребуются хаусдорфова метрика и соответствующая топология на множестве 2^Y замкнутых подмножеств компактного метрического пространства Y (дополнение В). Пространство 2^Y при такой топологии компактно (предложение В.2) и, следовательно, полно и сепарабельно. Далее потребуются несколько вспомогательных лемм.

Лемма 7.15. Пусть Y — компактное метрическое пространство, и пусть функция $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^*$ полунепрерывна снизу. Тогда функция $g^*: 2^Y \rightarrow \mathbb{R}^*$, определенная формулой

$$g^*(A) = \begin{cases} \min_{y \in A} g(y), & \text{если } A \neq \emptyset, \\ \infty & \text{если } A = \emptyset, \end{cases} \quad (56)$$

полунепрерывна снизу.

Доказательство. Так как пустое множество является изолированной точкой в пространстве 2^Y , то достаточно доказать, что функция g^* полунепрерывна снизу на множестве $2^Y - \{\emptyset\}$. Как было показано выше (предложение 7.32 (а)), если задано непустое множество $A \in 2^Y$, то существует точка $y \in A$ такая, что $g^*(A) = g(y)$. Пусть $\{A_n\} \subset 2^Y$ — последовательность непустых множеств, имеющих пределом $A \in 2^Y$, и пусть

точки $\{y_n\}$ такие, что $g^*(A_n) = g(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Выберем подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(y_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} g^*(A_n).$$

Подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ имеет предельную точку $y_0 \in Y$, и из леммы 7.13 (а) получаем, что

$$g(y_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} g(y_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow \infty} g^*(A_n).$$

Из соотношения (14) в приложении В и предложения В.3 имеем (в обозначениях приложения В) $y_0 \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, поэтому

$$g^*(A) \leq g(y_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} g^*(A_n).$$

Доказываемое утверждение следует теперь из леммы 7.13 (а). $\square$

Лемма 7.16. Пусть Y — компактное метризуемое пространство, и пусть функция $g: Y \rightarrow R^*$ полунепрерывна снизу. Тогда отображение $G: 2^Y R^* \rightarrow 2^Y$, определенное формулой

$$G(A, c) = A \cap \{y \in Y \mid g(y) \leq c\}, \quad (57)$$

измеримо по Борелю.

Доказательство. Покажем, что G является полунепрерывным сверху отображением (K) (см., определение В.2), и применим предложение В.4. Пусть $\{(A_n, c_n)\} \subset 2^Y R^*$ — последовательность, имеющая пределом пару (A, c) . Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G(A_n, c_n) = \phi$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G(A_n, c_n) \subset G(A, c). \quad (58)$$

В противном случае выберем $y \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} G(A_n, c_n)$. Существует последовательность $n_1 < n_2 < \dots$ номеров и последовательность $y_{n_k} \in G(A_{n_k}, c_{n_k})$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $y_{n_k} \rightarrow y$. По определению $y_{n_k} \in A_{n_k}$ для всех k , поэтому $y \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. С другой стороны, $g(y_{n_k}) \leq c_{n_k}$, $k = 1, 2, \dots$, и, используя полунепрерывность снизу функции g , получаем

$$g(y) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} g(y_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = c.$$

Следовательно, $y \in G(A, c)$, выполняется включение (58) и отображение G полунепрерывно снизу (K) . $\square$

Лемма 7.17. Пусть Y — компактное метризуемое пространство, и пусть функция $g: Y \rightarrow R^*$ полунепрерывна снизу. Пусть $g^*: 2^Y \rightarrow R^*$ — функция, определенная в (56). Тогда отображение $G^*: 2^Y \rightarrow 2^Y$, определенное формулой

$$G^*(A) = A \cap \{y \in Y \mid g(y) \leq g^*(A)\}, \quad (59)$$

измеримо по Борелю.

Доказательство. Пусть G — измеримая по Борелю функция, заданная в (57). Из леммы 7.15 следует, что функция g^* измерима по Борелю. Сравнение соотношений (57) и (59) показывает, что $G^*(A) = G[A, g^*(A)]$. Отсюда следует, что отображение G^* также измеримо по Борелю. $\square$

Лемма 7.18. Пусть Y — компактное метризуемое пространство. Существует измеримое по Борелю отображение $\sigma: 2^Y - \{\emptyset\} \rightarrow Y$ такое, что $\sigma(A) \in A$ для любого множества $A \in 2^Y - \{\emptyset\}$.

Доказательство. Пусть $\{g_n | n = 1, 2, \dots\}$ — подмножество в $C(Y)$, разделяющее точки в Y (например, такое подмножество построено при доказательстве предложения 7.7). Как и в лемме 7.15, определим функцию $g_n^*: 2^Y \rightarrow R^*$, полагая

$$g_n^*(A) = \begin{cases} \min_{y \in A} g_n(y), & \text{если } A \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{если } A = \emptyset, \end{cases}$$

и, как в лемме 7.17, определим отображение $G_n^*: 2^Y \rightarrow 2^Y$ равенством

$$G_n^*(A) = A \cap \{y \in Y | g_n(y) \leq g_n^*(A)\} = \{y \in A | g_n(y) = g_n^*(A)\}.$$

Определим рекурсивно отображения $H_n: 2^Y \rightarrow 2^Y$:

$$H_0(A) = A,$$

$$H_n(A) = G_n^*[H_{n-1}(A)], \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда для любого $A \neq \emptyset$ каждое множество $H_n(A)$ не пусто и компактно и

$$A = H_0(A) \supset H_1(A) \supset H_2(A) \supset \dots$$

Следовательно, $\bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(A) \neq \emptyset$.

Если $y, y' \in \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(A)$, то имеем

$$g_n(y) = g_n^*[H_{n-1}(A)] = g_n(y'), \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как множество $\{g_n | n = 1, 2, \dots\}$ разделяет точки в Y , то получаем, что $y = y'$, и множество $\bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(A)$ должно состоять из единственной точки, которую обозначим $\sigma(A)$.

Покажем, что для $A \neq \emptyset$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(A) = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(A) = \{\sigma(A)\}. \quad (60)$$

Так как последовательность $\{H_n(A)\}$ невозрастающая, то из соотношений (14) и (15) приложения В имеем

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(A) \subset \varliminf_{n \rightarrow \infty} H_n(A) \subset \varlimsup_{n \rightarrow \infty} H_n(A). \quad (61)$$

Если $y \in \varlimsup_{n \rightarrow \infty} H_n(A)$, то существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \dots$ и последовательность $y_{n_k} \in H_{n_k}(A)$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $y_{n_k} \rightarrow y$.

Для фиксированного k имеем $y_{n_j} \in H_k$ при всех $j \geq k$, и так как множество $H_{n_k}(A)$ замкнуто, то получаем, что $y \in H_{n_k}(A)$. Следовательно, $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(A)$ и

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} H_n(A) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n(A). \quad (62)$$

Из (61) и (62) следует (60).

Так как отображения G_n^* и H_n измеримы по Борелю при каждом n , то отображение $\nu: 2^Y - \{\emptyset\} \rightarrow 2^Y$, определенное как $\nu(A) = \{\sigma(A)\}$, тоже измеримо по Борелю. Легко видеть, что отображение $\tau: Y \rightarrow 2^Y$,

заданное как $\tau(Y) = \{Y\}$, является гомеоморфизмом. В силу компактности пространства Y множество $\tau(Y)$ также компактно, и поэтому замкнуто в 2^Y , а отображение $\tau^{-1}: \tau(Y) \rightarrow Y$ измеримо по Борелю. Так как $\sigma = \tau^{-1} \circ \nu$, отсюда следует, что отображение σ измеримо по Борелю. $\square$

Лемма 7.19. Пусть X — метризуемое пространство, Y — компактное метризуемое пространство, и пусть функция $f: XY \rightarrow R^*$ полунепрерывна снизу. Тогда отображение $F: XR^* \rightarrow 2^Y$, определенное формулой

$$F(x, c) = \{y \in Y \mid f(x, y) \leq c\}, \quad (63)$$

измеримо по Борелю.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 7.16. Устанавливается, что отображение F полунепрерывно (K) сверху и применяется предложение В.4.

Пусть $(x_n, c_n) \rightarrow (x, c)$ в XR^* , и пусть y — элемент из множества $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F(x_n, c_n)$ при условии, что это множество не пусто. Существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \dots$ и последовательность $y_{n_k} \in F(x_{n_k}, c_{n_k})$ такие, что $y_{n_k} \rightarrow y$. Так как $f(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq c_{n_k}$ и функция f полунепрерывна снизу, то можно заключить, что $f(x, y) \leq c$, поэтому $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F(x_n, c_n) \subset F(x, c)$. Отсюда следует необходимый результат. $\square$

Лемма 7.20. Пусть X — метризуемое пространство, Y — компактное метризуемое пространство, и пусть функция $f: XY \rightarrow R^*$ полунепрерывна снизу. Пусть $f^*: X \rightarrow R^*$ — функция, задаваемая формулой $f^*(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)$. Тогда отображение $F^*: X \rightarrow 2^Y$:

$$F^*(x) = \{y \in Y \mid f(x, y) \leq f^*(x)\}, \quad (64)$$

измеримо по Борелю.

Доказательство. Пусть F — измеримая по Борелю функция, определенная соотношением (63). В силу предложения 7.32 (а) функция f^* также измерима по Борелю. Из формул (63) и (64) имеем $F^*(x) = F(x, f^*(x))$, откуда следует, что отображение F^* тоже измеримо по Борелю. $\square$

Мы теперь готовы к доказательству теоремы о выборе для полунепрерывных снизу функций.

Предложение 7.33. Пусть X — метризуемое пространство, Y — компактное метризуемое пространство, D — замкнутое подмножество в XY , и пусть функция $f: D \rightarrow R^*$ полунепрерывна снизу. Определим функцию $f^*: \text{proj}_X(D) \rightarrow R^*$ соотношением

$$f^*(x) = \min_{y \in D_x} f(x, y). \quad (65)$$

Тогда множество $\text{proj}_X(D)$ замкнуто в X , функция f^* полунепрерывна снизу, и существует измеримое по Борелю отображение $\varphi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такое, что $\text{Gr}(\varphi) \subset D$ u^*)

$$f(x, \varphi(x)) = f^*(x) \quad \forall x \in \text{proj}_X(D). \quad (66)$$

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда $D = XY$. Как и в лемме 7.18, пусть $\sigma: 2^Y - \{\emptyset\} \rightarrow Y$ — измеримое по Борелю отображение, удовлетворяющее условию $\sigma(A) \in A$ при любом $A \in 2^Y - \{\emptyset\}$. Как

$u^*)$ Через $\text{Gr}(\varphi)$ обозначается график отображения φ в пространстве XY . (Прим. ред.)

и в лемме 7.20, пусть $F^*: X \rightarrow 2^Y$ — измеримое по Борелю отображение, определяемое соотношением

$$F^*(x) = \{y \in Y \mid f(x, y) = f^*(x)\}.$$

Из предложения 7.32 (а) следует, что функция f^* полунепрерывна снизу и $F^*(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in X$. Поэтому композиция $\varphi = \sigma \circ F^*$ удовлетворяет равенству (66).

Предположим теперь, что множество D не обязательно совпадает с XY . Чтобы убедиться в том, что множество $\text{proj}_X(D)$ замкнуто, заметим, что функция $g = -\chi_D$ полунепрерывна снизу и

$$\text{proj}_X(D) = \{x \in X \mid g^*(x) \leq -1\},$$

где $g^*(x) = \min_{y \in Y} g(x, y)$. Согласно уже доказанному случаю нашего предложения, функция g^* полунепрерывна снизу, множество $\text{proj}_X(D)$ замкнуто и существует измеримое по Борелю отображение $\varphi_1: X \rightarrow Y$ такое, что $g[x, \varphi_1(x)] = g^*(x)$ для любого $x \in X$ или, что эквивалентно, $(x, \varphi_1(x)) \in D$ для каждого $x \in \text{proj}_X(D)$.

Определим теперь полунепрерывную снизу функцию $\hat{f}: XY \rightarrow R^*$, полагая

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in D, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для всех чисел $c \in R$ имеем

$$\{x \in \text{proj}_X(D) \mid f^*(x) \leq c\} = \{x \in X \mid \min_{y \in Y} \hat{f}(x, y) \leq c\}.$$

Так как функция $\min_{y \in Y} \hat{f}(x, y)$ полунепрерывна снизу, то f^* также полунепрерывна снизу. Пусть $\varphi_2: X \rightarrow Y$ — измеримое по Борелю отображение, удовлетворяющее равенству

$$\hat{f}[x, \varphi_2(x)] = \min_{y \in Y} \hat{f}(x, y) \quad \forall x \in X.$$

Ясно, что $(x, \varphi_2(x)) \in D$ при любом x из борелевского множества

$$\{x \in X \mid \min_{y \in Y} \hat{f}(x, y) < \infty\}.$$

Определим функцию $\varphi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{если } \min_{y \in Y} \hat{f}(x, y) = \infty, \\ \varphi_2(x), & \text{если } \min_{y \in Y} \hat{f}(x, y) < \infty. \end{cases}$$

Функция φ измерима по Борелю и удовлетворяет равенству (66). $\square$

Обратимся теперь к выбору в случае полунепрерывной сверху функции. Анализ здесь значительно проще. Но, в отличие от "точного" селектора в соотношении (66), в этом случае получается только "приблизительный" селектор.

Лемма 7.21. Пусть X — метризуемое пространство, Y — сепарабельное метризуемое пространство и G — открытое подмножество в XY . Тогда множество $\text{proj}_X(G)$ открыто и существует измеримая по Борелю функция $\varphi: \text{proj}_X(G) \rightarrow Y$ такая, что $\text{Gr}(\varphi) \subset G$.

Доказательство. Пусть $\{y_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ — счетное всюду плотное подмножество в Y . Для фиксированной точки $y \in Y$, отображение

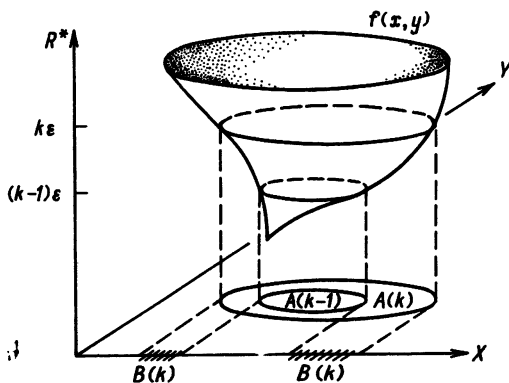


Рис. 1

$x \rightarrow (x, y)$ непрерывно, поэтому множество $\{x \in X \mid (x, y) \in G\}$ открыто. Положим $G_n = \{x \in X \mid (x, y_n) \in G\}$. Заметим, что $\text{proj}_X(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ — открытое множество. Определим отображение $\varphi: \text{proj}_X(G) \rightarrow Y$ формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_1, & \text{если } x \in G_1, \\ y_n, & \text{если } x \in G_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} G_k, \quad n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Тогда φ измеримо по Борелю, и $\text{Gr}(\varphi) \subset G$. $\square$

Предложение 7.34. Пусть X — метризуемое пространство, Y — сепарабельное метризуемое пространство, D — открытое подмножество в XY , и пусть функция $f: D \rightarrow R^*$ полунепрерывна сверху. Определим функцию $f^*: \text{proj}_X(D) \rightarrow R^*$ формулой

$$f^*(x) = \inf_{y \in D_x} f(x, y). \quad (67)$$

Тогда множество $\text{proj}_X(D)$ открыто в X , функция f^* полунепрерывна сверху и для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое по Борелю отображение $\varphi_\epsilon: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такое, что $\text{Gr}(\varphi_\epsilon) \subset D$ и при каждом $x \in \text{proj}_X(D)$ имеет место неравенство

$$f[x, \varphi_\epsilon(x)] \leq \begin{cases} f^*(x) + \epsilon, & \text{если } f^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } f^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (68)$$

Доказательство. Множество $\text{proj}_X(D)$ открыто в X , согласно лемме 7.21. Для того чтобы показать, что функция f^* полунепрерывна сверху, определим полунепрерывную сверху функцию $\hat{f}: XY \rightarrow R^*$, полагая

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in D, \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любого $c \in R$ имеем

$$\{x \in \text{proj}_X(D) \mid f^*(x) < c\} = \{x \in X \mid \inf_{y \in Y} \hat{f}(x, y) < c\},$$

и, согласно предложению 7.32 (б), это множество открыто.

Пусть задано $\epsilon > 0$. Для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ определим множества (рис. 7.1)

$$A(k) = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) < k\epsilon\},$$

$$B(k) = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid (k-1)\epsilon \leq f^*(x) < k\epsilon\},$$

$$B(-\infty) = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid f^*(x) = -\infty\},$$

$$B(\infty) = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid f^*(x) = \infty\}.$$

Множества $A(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, открыты, а множества $B(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $B(-\infty)$ и $B(\infty)$ измеримы по Борелю. Согласно лемме 7.21, для каждого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ существуют измеримые по Борелю отображения $\varphi_k: \text{proj}_X(A(k)) \rightarrow Y$ такие, что $\text{Gr}(\varphi_k) \subset A(k)$ и, существует измеримое по Борелю отображение $\bar{\varphi}: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такое, что $\text{Gr}(\bar{\varphi}) \subset D$.

Выберем целое число $k^* \leq -1/\epsilon^2$ и определим функцию $\varphi_\epsilon: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ формулой

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & \text{если } x \in B(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \bar{\varphi}(x), & \text{если } x \in B(\infty), \\ \varphi_{k^*}(x), & \text{если } x \in B(-\infty). \end{cases}$$

Так как $B(k) \subset \text{proj}_X[A(k)]$ и $B(-\infty) \subset \text{proj}_X[A(k)]$ при каждом k , такое определение возможно. Ясно, что отображение φ_ϵ измеримо по Борелю и $\text{Gr}(\varphi_\epsilon) \subset D$. Если $x \in B(k)$, то, так как $(x, \varphi_k(x)) \in A(k)$, имеем

$$f[x, \varphi_\epsilon(x)] = f[x, \varphi_k(x)] < k\epsilon \leq f^*(x) + \epsilon.$$

Если $x \in B(\infty)$, то $f(x, y) = \infty$ для всех $y \in D_x$ и $f[x, \varphi_\epsilon(x)] = \infty = f^*(x)$. Если $x \in B(-\infty)$, то имеем

$$f[x, \varphi_\epsilon(x)] = f[x, \varphi_{k^*}(x)] < k^*\epsilon \leq -1/\epsilon.$$

Следовательно, φ_ϵ обладает всеми требуемыми свойствами. $\square$

7.6. Аналитические множества

Центральное место в алгоритме динамического программирования занимает нахождение инфимума функций, что в свою очередь тесно связано с проекциями множеств. А именно, если задана функция $f: XY \rightarrow R^*$ и функция $f^*: X \rightarrow R^*$ определена формулой

$$f^*(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y),$$

то для любого числа $c \in R$ имеет место соотношение

$$\{x \in X \mid f^*(x) < c\} = \text{proj}_X(\{(x, y) \in XY \mid f(x, y) < c\}).$$

Если f — борелевская функция, то множество $\{(x, y) \mid f(x, y) < c\}$ борелевское. К сожалению, проекция борелевского множества не обязательно является борелевским множеством. В борелевских пространствах, однако, проекции борелевских множеств являются аналитическими множествами, исследованию свойств которых и посвящен этот раздел.

7.6.1. Эквивалентные определения аналитических множеств

Существует несколько способов определения класса аналитических множеств в борелевском пространстве X . Один из них состоит в том, чтобы определить аналитические множества как проекции в X борелевских

множеств пространства XY , где Y — некоторое несчетное борелевское пространство. Другая возможность — определить их как образы бэровского нулевого пространства N при непрерывных отображениях N в X . Еще один путь — определить их как все множества вида

$$\bigcup_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in N} \bigcap_{n=1}^{\infty} S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

где N — множество всех последовательностей натуральных чисел (бэровское нулевое пространство), а $S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ — замкнутые множества в X . Как будет показано в предложении 7.41, все эти определения эквивалентны. Мы примем за исходный пункт третье определение, так как с ним наиболее удобно работать.

Начнем с формального описания только что введенной операции с множествами в терминах системы Суслина в пространстве с покрытием.

Определение 7.14. Пусть X — некоторое множество. *Покрывие* P множества X — это непустое семейство подмножеств из X . Пара (X, P) называется *пространством с покрытием*.

Если (X, P) — пространство с покрытием, обозначим через $\sigma(P)$ σ -алгебру, порожденную P , через P_δ — совокупность всех пересечений счетного числа элементов из P , и через P_σ — совокупность всех объединений счетного числа элементов из P . Напомним, что N обозначает множество натуральных чисел, $\mathbb{N}$ — множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел, Σ — множество всех конечных последовательностей натуральных чисел.

Определение 7.15. Пусть (X, P) — пространство с покрытием. *Системой Суслина* для P называется отображение Σ в P . *Ядром системы Суслина* $S: \Sigma \rightarrow P$ называется множество

$$N(S) = \bigcup_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in \Sigma} \bigcap_{n=1}^{\infty} S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n). \quad (69)$$

Множество всех ядер систем Суслина для данного покрытия для P будет обозначаться через $S(P)^*$.

Для упрощения записи будем писать $s < z$, если $\sigma_1 = \zeta_1, \sigma_2 = \zeta_2, \dots, \sigma_n = \zeta_n$, где $s = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \Sigma$ и $z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots) \in N$. В этих обозначениях определение (69) принимает вид

$$N(S) = \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} S(s).$$

В дальнейшем оба эти выражения используются на равных правах.

Заметим, что в формуле (69) участвует объединение несчетного числа множеств, поэтому, когда P является σ -алгеброй, а S — системой Суслина для P , множество $N(S)$ может не принадлежать P . Ниже приводятся некоторые свойства $S(P)$.

Предложение 7.35. Пусть X — пространство с покрытиями P и Q такими, что $P \subset Q$. Тогда

$$(a) S(P) \subset S(Q); \quad (b) S(P)_\delta = S(P); \quad (в) S(P)_\sigma = S(P);$$

$$(г) P \subset S(P); \quad (д) S(P) = S[S(P)].$$

*) В отечественной математической литературе множество $N(S)$ принято называть "результатом A -операции, примененной к системе S ". Термины " A -операция" и " A -множество" введены М. Суслиным в честь открывшего их П.С. Александрова. Позднее, Н.Н. Лузин стал называть A -множества *аналитическими множествами*, и это название закрепилось за ними (см. определение 7.16). (Прим. ред.)

Доказательство.

(а) Очевидно.

(б) Ясно, что $S(P)_\delta \supset S(P)$. Выберем теперь $\bigcap_{k=1}^\infty N(S_k) \in S(P)_\delta$, где S_k — система Суслина для P , $k = 1, 2, \dots$. Этого достаточно, чтобы построить такую систему Суслина S для P , что

$$N(S) = \bigcap_{k=1}^\infty N(S_k). \quad (70)$$

Пусть $\Pi_k = \{(2j-1)2^{k-1} | j = 1, 2, \dots\}$, для $k = 1, 2, \dots$. Тогда множества $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ образуют разбиение множества N на бесконечное число бесконечных множеств. Для любого натурального числа k определим функцию $\varphi_k: N \rightarrow N$ формулой

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_{2^{k-1}}, \xi_{3 \cdot 2^{k-1}}, \xi_{5 \cdot 2^{k-1}}, \dots);$$

образно говоря, функция φ_k выбирает из последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ компоненты с индексами, принадлежащими Π_k . Мы хотим построить такую систему Суслина S , для которой

$$\bigcap_{s < z} S(s) = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcap_{s < \varphi_k(z)} S_k(s) \quad \forall z \in N. \quad (71)$$

Соотношение (71) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \bigcap_{n=1}^\infty S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= \\ &= \bigcap_{k=1}^\infty \bigcap_{j=1}^\infty S_k(\xi_{2^{k-1}}, \xi_{3 \cdot 2^{k-1}}, \dots, \xi_{(2j-1)2^{k-1}}) \quad \forall (\xi_1, \xi_2, \dots) \in N. \end{aligned} \quad (72)$$

Для любой конечной последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Sigma$ имеется в точности одна пара натуральных чисел j и k таких, что $n = (2j-1)2^{k-1}$. Положим

$$S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = S_k(\xi_{2^{k-1}}, \xi_{3 \cdot 2^{k-1}}, \dots, \xi_{(2j-1)2^{k-1}}). \quad (73)$$

Этим определяется система Суслина S , для которой легко можно проверить соотношение (72), а следовательно, и (71).

Воспользуемся теперь соотношением (71), чтобы доказать (70). Выберем точку

$$x \in N(S) = \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} S(s).$$

Для некоторого элемента $z_0 \in N$ имеем

$$x \in \bigcap_{s < z_0} S(s) = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcap_{s < \varphi_k(z_0)} S_k(s).$$

Таким образом, для всех k

$$x \in \bigcap_{s < \varphi_k(z_0)} S_k(s) \subset \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} S_k(s) = N(S_k).$$

Следовательно, $x \in \bigcap_{k=1}^\infty N(S_k)$ и

$$N(S) \subset \bigcap_{k=1}^\infty N(S_k). \quad (74)$$

Если задана точка $x \in \bigcap_{k=1}^\infty N(S_k)$, то $x \in \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} S_k(s)$ для любого k , поэтому для любого k существует элемент $z_k \in N$ такой, что

$x \in \bigcap_{s < z_k} S_k(s)$. Рассмотрим такой элемент $z_0 \in \mathbb{N}$, что $\varphi_k(z_0) = z_k$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{s < \varphi_k(z_0)} S_k(s)$. Применение соотношения (71) показывает, что

$$x \in \bigcap_{s < z_0} S(s) \subset \bigcup_{z \in \mathbb{N}} \bigcap_{s < z} S(s) = N(S)$$

и кроме того

$$N(S) \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} N(S_k). \quad (75)$$

Равенство (70) следует теперь из включений (74) и (75).

(в) Ясно, что $S(P)_\sigma \supset S(P)$. Выберем $\bigcup_{k=1}^{\infty} N(S_k) \in S(P)_\sigma$, где S_k — система Суслица для P , $k = 1, 2, \dots$. Достаточно построить систему Суслина S для P , для которой

$$N(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} N(S_k). \quad (76)$$

Если задана конечная последовательность $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Sigma$, то $\xi_1 = (2j - 1)2^{k-1}$ в точности для одной пары натуральных чисел j и k . Положим

$$S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = S((2j - 1)2^{k-1}, \xi_2, \dots, \xi_n) = S_k(j, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Это определяет систему Суслина S , для которой

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S((2j - 1)2^{k-1}, \xi_2, \dots, \xi_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_k(j, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall (j, \xi_2, \dots) \in \mathbb{N}. \quad (77)$$

Возвращаясь к (76), выберем точку $x \in N(S) = \bigcup_{z \in \mathbb{N}} \bigcap_{s < z} S(s)$. Для некоторой последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{N}$ имеем $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и, выбирая j и k так, чтобы $\xi_1 = (2j - 1)2^{k-1}$, из соотношения (77) получим, что

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_k(j, \xi_2, \dots, \xi_n) \subset N(S_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(S_k),$$

поэтому

$$N(S) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(S_k). \quad (78)$$

Если, с другой стороны, мы выберем

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} N(S_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{z \in \mathbb{N}} \bigcap_{s < z} S_k(s),$$

то для некоторых числа $k \in \mathbb{N}$ и последовательности $(j, \xi_2, \dots) \in \mathbb{N}$ будем иметь $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_k(j, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Равенство (77) означает, что

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S((2j - 1)2^{k-1}, \xi_2, \dots, \xi_n) \subset N(S),$$

поэтому

$$N(S) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(S_k). \quad (79)$$

Соотношение (76) следует из включений (78) и (79).

(г) Для множества $P \in \mathcal{P}$ положим $S(s) = P$ при всех $s \in \Sigma$. Тогда $N(s) = P$.

(д) Доказательство этого утверждения увело бы нас слишком далеко, поэтому оно вынесено в приложение Б, раздел Б.1. □

Вообще говоря, множество $S(P)$ не замкнуто относительно операции дополнения, поэтому в общем случае класс $S(P)$ не является σ -алгеброй. Для того чтобы класс $S(P)$ содержал σ -алгебру $\sigma(P)$, нам понадобится одно дополнительное предположение.

Следствие 7.35.1. Пусть $(X, \mathcal{P})$ — пространство с покрытием, и пусть дополнение любого множества из $\mathcal{P}$ принадлежит $S(P)$. Тогда $\sigma(P) \subset S(P)$.

Доказательство. Наименьшая алгебра, содержащая $\mathcal{P}$, состоит из конечных пересечений конечных объединений множеств из $\mathcal{P}$ и их дополнений. Согласно предложению 7.35, эти множества содержатся в $S[S(P)] = S(P)$. Так как множество $S(P)$ является монотонным классом, оно содержит и σ -алгебру, порожденную системой $\mathcal{P}$ (Аш [7, с. 19]) *).

Определение 7.16. Пусть X — борелевское пространство. Обозначим через F_X класс всех замкнутых множеств в X . Аналитическими множествами в пространстве X называются элементы класса $S(F_X)$.

Следствие 7.35.2. Пусть X — борелевское пространство. Счетные пересечения и объединения аналитических множеств из X являются аналитическими множествами.

Доказательство. Утверждение следует из предложения 7.35 (б) и (в). □

Предложение 7.36. Пусть X — борелевское пространство. Тогда каждое борелевское множество в X является аналитическим множеством. Более того, класс аналитических множеств $S(F_X)$ совпадает с классом $S(B_X)$.

Доказательство. Любое открытое множество в X является F_σ -множеством (лемма 7.2), поэтому всякое открытое множество аналитическое. Из следствия 7.35.1 следует, что $B_X \subset S(F_X)$. В силу предложения 7.35 (а) и (д)

$$S(F_X) \subset S(B_X) \subset S[S(F_X)] = S(F_X). \quad \square$$

Если борелевское пространство X счетно, то любое множество в X является и аналитическим и борелевским. Однако если X несчетно, то класс аналитических множеств в X строго шире, чем B_X . Это показано в приложении Б, где доказывается существование аналитического множества, дополнение которого не является аналитическим.

Заметим, что из предложения 7.36 непосредственно следует, что если Y является борелевским подмножеством борелевского пространства X , то аналитические множества в Y являются аналитическими множествами в X , содержащимися в Y . Обобщением этого факта является следующее утверждение.

Следствие 7.36.1. Пусть X и Y — борелевские пространства, и отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ является борелевским изоморфизмом. Множество $A \subset X$ является аналитическим в том и только в том случае, когда $\varphi(A) \subset Y$ — аналитическое множество.

Доказательство. Если $\varphi: X \rightarrow Y$ — борелевский изоморфизм и $A \subset X$ — аналитическое множество, то $A = N(S)$, где S — система Суслина для F_X . Легко видеть, что $\varphi(A) = N(\varphi \circ S)$, где $\varphi \circ S$ является систе-

*) Или см. Халмош [37], § 6. (Прим. ред.)

мой Суслина для B_Y , определенной равенством $(\varphi \circ S)(s) = \varphi[S(s)]$, поэтому множество $\varphi(A)$ аналитическое, согласно предложению 7.36. Аналогично проверяется, что если $\varphi(A) \subset Y$ — аналитическое множество, то $A \subset X$ также будет аналитическим множеством. $\square$

Продолжим исследование различных эквивалентных характеристик аналитических множеств. В общем определении системы Суслина ничего не требуется от вида отображения $S: \Sigma \rightarrow P$. В случае, когда X является сепарабельным метрическим пространством и $P = F_X$, можно не ограничивая общности, считать, что S обладает определенной структурой.

Определение 7.17. Пусть (X, P) — пространство с покрытием и S — система Суслина для P . Система Суслина S называется *регулярной*, если для любых $n \in \mathbb{N}$ и $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}) \in \Sigma$ имеем $S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \supset S(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1})$.

Лемма 7.22. Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство и S — система Суслина для F_X . Тогда существует регулярная система Суслина R для F_X такая, что $N(R) = N(S)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0,$$

если

$$R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq \emptyset \quad \forall n, \quad (80)$$

для всех $z = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in N$.

Доказательство. Согласно свойству Линделефа, при любом натуральном числе k , пространство X можно покрыть счетным семейством открытых сфер вида $B_{k,j} = \{x \in X \mid d(x, x_{k,j}) < 1/k\}$, $j = 1, 2, \dots$. Для любой последовательности $(\bar{\xi}_1, \xi_1, \bar{\xi}_2, \xi_2, \dots) \in N$, положим

$$R(\bar{\xi}_1) = \bar{B}_{1, \bar{\xi}_1},$$

$$R(\bar{\xi}_1, \xi_1) = R(\bar{\xi}_1) \cap S(\xi_1),$$

$$R(\bar{\xi}_1, \xi_1, \bar{\xi}_2) = R(\bar{\xi}_1, \xi_1) \cap \bar{B}_{2, \bar{\xi}_2},$$

$$R(\bar{\xi}_1, \xi_1, \bar{\xi}_2, \xi_2) = R(\bar{\xi}_1, \xi_1, \bar{\xi}_2) \cap S(\xi_2)$$

и т.д. Тогда

$$R(S) = \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{k, \bar{\xi}_k} \right] \cap \left[\bigcap_{s < z} S(s) \right], \quad (81)$$

где $z = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Ясно, что R является регулярной системой Суслина для F_X , и условие (80) выполняется. Если $x \in N(R)$, то существует последовательность $(\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots) \in N$ такая, что $x \in \bigcap_{s < (\bar{\xi}_1, \xi_1, \bar{\xi}_2, \xi_2, \dots)} R(s)$, поэтому, согласно соотношению (81), $x \in \bigcap_{s < (\xi_1, \xi_2, \dots)} S(s) \subset N(S)$,

и, следовательно, $N(R) \subset N(S)$. Если $x \in N(S)$, то существует последовательность $(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N$ такая, что $x \in \bigcap_{s < (\xi_1, \xi_2, \dots)} S(s)$. Так как семейство $\{B_{k,j} \mid j = 1, 2, \dots\}$ покрывает X , то для любого k найдется натуральное число $\bar{\xi}_k$, при котором $x \in B_{k, \bar{\xi}_k}$. Тогда $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{k, \bar{\xi}_k}$ и, согласно (81), $x \in \bigcap_{s < (\bar{\xi}_1, \xi_1, \bar{\xi}_2, \xi_2, \dots)} R(s) \subset N(R)$, поэтому $N(R) \supset N(S)$. Значит, $N(R) = N(S)$. $\square$

Заметим, что если регулярная система Суслина удовлетворяет условию (80), то для всех z из множества

$$N_1 = \{z \in N \mid \bigcap_{s < z} R(s) \neq \emptyset\}$$

множество $\bigcap_{s < z} R(s)$ состоит из единственной точки, скажем, $f(z)$. Таким образом, $N(R) = f(N_1)$, и это соотношение позволяет дать другое описание аналитических множеств. Имеем следующую лемму.

Лемма 7.23. Пусть (X, d) — полное сепарабельное метрическое пространство. Если $A \subset X$ — непустое аналитическое множество, то существуют замкнутое подмножество N_1 множества N и непрерывная функция $f: N_1 \rightarrow X$ такие, что $A = f(N_1)$. И обратно, если $N_1 \subset N$ замкнуто и $f: N_1 \rightarrow X$ — непрерывная функция, то $f(N_1)$ — аналитическое множество.

Доказательство. Пусть $A = N(R)$ — непустое множество, где R — регулярная система Суслина для F_X , удовлетворяющая условию (80). Положим

$$N_1 = \{z \in N \mid \bigcap_{s < z} R(s) \neq \emptyset\}.$$

Пусть элемент $z = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ принадлежит N . Если множество $R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq \emptyset$ для любого n , то можно выбрать $x_n \in R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Согласно условию (80), последовательность $\{x_n\}$ является последовательностью Коши, и так как (X, d) — полное пространство, то $\{x_n\}$ имеет предел $x \in X$. Но из регулярности R вытекает, что $\{x_m \mid m \geq n\} \subset R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ при любом n , поэтому $x \in R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Следовательно, $x \in \bigcap_{s < z} R(s)$. Предположим теперь, что $z \in N - N_1$. Предшествующие рассуждения показывают, что для некоторого элемента $s_n < z$ множество $R(s_n) = \emptyset$. Открытая окрестность $\{w \in N \mid s_n < w\}$ содержит элемент z и содержится в множестве $N - N_1$, поэтому $N - N_1$ — открытое, а N_1 — замкнутое множества.

Для любого элемента $z \in N_1$ положим функцию $f(z)$ равной единственной точке множества $\bigcap_{s < z} R(s)$. Если $\{z_k\}$ — последовательность элементов из N_1 , сходящаяся к элементу $z_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in N_1$, то в силу условия (80) для любого $\epsilon > 0$ найдется элемент $s_n < z_0$, для которого $\text{diam } R(s_n) < \epsilon$. Для достаточно больших k $z_k \in \{z \in N \mid s_n < z\}$, поэтому $f(z_k) \in R(s_n)$. Следовательно, $d(f(z_k), f(z_0)) \leq \text{diam } R(s_n) < \epsilon$, откуда видно, что функция f непрерывна.

Чтобы показать обратное, предположим, что множество $N_1 \subset N$ замкнуто и функция $f: N_1 \rightarrow X$ непрерывна. Определим регулярную систему Суслина R для F_X , полагая

$$R(s) = f(\{z \in N_1 \mid s < z\}),$$

где $R(s) = \emptyset$, если $\{z \in N_1 \mid s < z\} = \emptyset$. Если $z \in N_1$, то $f(z) \in \bigcap_{s < z} R(s) \subset N(R)$, поэтому $f(N_1) \subset N(R)$. Если $x \in N(R)$, то для некоторого $z_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in N$ имеем $x \in \bigcap_{s < z_0} R(s)$. Тогда

$$x \in \overline{f(\{z \in N_1 \mid (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < z\})}$$

для любого n , поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует элемент $z_n \in N_1$, для которого $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) < z_n$ и $d(x, f(z_n)) < \epsilon$. Но при $n \rightarrow \infty$ последовательность z_n должна сходиться к z_0 . Из замкнутости множества N_1 следует, что $z_0 \in N_1$, а из непрерывности функции f следует, что $d(x, f(z_0)) \leq \epsilon$.

Поскольку $\epsilon > 0$ произвольно, получаем, что $f(z_0) = x$, $x \in f(N_1)$ и $N(R) \subset f(N_1)$. $\square$

Таким образом, аналитические множества можно охарактеризовать как непрерывные образы замкнутых подмножеств пространства N . Чтобы получить более тонкую характеристику аналитических множеств, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.24. *Если N_1 — непустое замкнутое подмножество пространства N , то существует непрерывная функция $g: N \rightarrow N$ такая, что $N_1 = g(N)$.*

Доказательство. Воспользуемся свойством Линделёфа, чтобы покрыть N_1 счетным семейством непустых замкнутых множеств $\{S(\xi_1) \mid \xi_1 \in N\}$, удовлетворяющих условию

$$N_1 \supset S(\xi_1), \quad \text{diam } S(\xi_1) \leq 1, \quad \xi_1 = 1, 2, \dots,$$

где d — метрика в N , согласованная с его топологией, а $\text{diam } S(\xi_1)$ определен формулой (9). Покроем каждое множество $S(\xi_1)$ счетным семейством непустых замкнутых множеств $\{S(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_2 \in N\}$, удовлетворяющих условию.

$$S(\xi_1) \supset S(\xi_1, \xi_2), \quad \text{diam } S(\xi_1, \xi_2) \leq 1/2, \quad \xi_2 = 1, 2, \dots$$

Продолжая это построение, получим, что для любой последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$

$$S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq \emptyset, \quad \xi_n = 1, 2, \dots, \quad (82)$$

$$S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \bigcup_{\xi_n=1}^{\infty} S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (83)$$

$$S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) \supset S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n), \quad \xi_n = 1, 2, \dots, \quad (84)$$

$$\text{diam } S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq 1/n, \quad \xi_n = 1, 2, \dots \quad (85)$$

Из полноты пространства N и условий (82) — (85) следует, что для любого элемента $z \in N$ множество $\bigcap_{s \in \mathbb{N}} S(s)$ состоит из единственной точки. Обозначим эту точку $g(z)$. Тогда $N(S) = g(N) = N_1$. Непрерывность функции g доказывается как в лемме 7.23. $\square$

Предложение 7.37. *Пусть X — борелевское пространство. Непустое множество $A \subset X$ является аналитическим тогда и только тогда, когда $A = f(N)$ для некоторой непрерывной функции $f: N \rightarrow X$.*

Доказательство. Если X — полное пространство, то требуемое утверждение следует из лемм 7.23 и 7.24. Если же X не полно, то оно гомеоморфно борелевскому подмножеству полного сепарабельного пространства, и требуемый результат вытекает из следствия 7.36.1. $\square$

Предложение 7.37 устанавливает очень полезную характеристику непустых аналитических множеств в терминах непрерывных функций и бэровского нулевого пространства N . Бэровское нулевое пространство имеет простое описание и топология на нем обладает большой гибкостью. Например, как уже было показано, оно гомеоморфно пространству N_0 — пространству иррациональных чисел на отрезке $[0, 1]$. Далее устанавливается еще один важный гомеоморфизм.

Лемма 7.25. *Пространство N гомеоморфно любому конечному или счетному произведению таких же пространств.*

Доказательство. Докажем лемму для случая счетного произведения. Пусть $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ — разбиение множества N (множества положительных целых чисел) на бесконечное число бесконечных множеств. Определим

отображение $\varphi: N \rightarrow NNN \dots$, полагая

$$\varphi(z) = (z_1, z_2, \dots), \quad (86)$$

где элемент z_k образуется из компонент $\tilde{z}$ с индексами из Π_k . Тогда φ — взаимно однозначное отображение, и так как сходимости в пространстве произведений является покомпонентной, то φ — гомеоморфизм. $\square$

Комбинируя лемму 7.25 и предложение 7.37, получаем следующий результат.

Предложение 7.38. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность борелевских пространств и A_k — аналитическое множество в X_k , $k = 1, 2, \dots$. Тогда множества $A_1 A_2 \dots$ и $A_1 A_2 \dots A_n$, $n = 1, 2, \dots$, являются аналитическими соответственно в пространствах $X_1 X_2 \dots$ и $X_1 X_2 \dots X_n$.

Доказательство. Пусть $f_k: N \rightarrow X$ — непрерывная функция такая, что $A_k = f_k(N)$, $k = 1, 2, \dots$. И пусть отображение φ задано соотношением (86), а отображение $F: NN \dots \rightarrow X_1 X_2 \dots$ — формулой

$$F(z_1, z_2, \dots) = (f_1(z_1), f_2(z_2), \dots).$$

Тогда $F \circ \varphi$ непрерывно отображает N на $A_1, A_2, \dots$. Аналогично поступаем с конечными произведениями. $\square$

Другое следствие предложения 7.37 состоит в том, что непрерывный образ аналитического множества, в частности проекция аналитического множества, является аналитическим. Как уже говорилось в начале раздела, именно этим свойством объясняется наш интерес к аналитическим множествам. Сформируем теперь этот и связанный с ним факт, чтобы получить еще одну характеристику аналитических множеств.

Предложение 7.39. Пусть X и Y — борелевские пространства, а A — аналитическое множество в пространстве XY . Тогда $\text{proj}_X(A)$ является аналитическим множеством. И обратно, для любого аналитического множества $C \subset X$ и произвольного несчетного борелевского пространства Y существует борелевское множество $B \subset XY$ такое, что $C = \text{proj}_X(B)$. Если $Y = N$, то множество B может быть выбрано замкнутым.

Доказательство. Если $A = f(N) \subset XY$ является аналитическим множеством, где f — непрерывная функция, то $\text{proj}_X(A) = (\text{proj}_X \circ f)(N)$ является тоже аналитическим множеством в силу предложения 7.37. Если $C = f(N) \subset X$ — непустое аналитическое множество, то $C = \text{proj}_X[\text{Gr}(f)]$, где множество $\text{Gr}(f) = \{(f(z), z) \in XN \mid z \in N\}$ замкнуто в силу непрерывности функции f . Если Y — произвольное несчетное борелевское пространство, то существует борелевский изоморфизм φ из N на Y (следствие 7.16.1). Отображение Φ , определенное формулой $\Phi(x, z) = (x, \varphi(z))$, является борелевским изоморфизмом из XN на XY и

$$C = \text{proj}_X(\Phi[\tilde{\text{Gr}}(f)]). \quad \square$$

До сих пор рассматривались только непрерывные образы аналитических множеств. С помощью предложения 7.39 можно исследовать образы аналитических множеств также и при борелевских отображениях.

Предложение 7.40. Пусть X и Y — борелевские пространства и $f: X \rightarrow Y$ — борелевская функция. Если $A \subset X$ — аналитическое множество, то $f(A)$ — тоже аналитическое множество. Если множество $B \subset Y$ аналитическое, то $f^{-1}(B)$ — тоже аналитическое.

Доказательство. Предположим, что $A \subset X$ — аналитическое множество. Согласно предложению 7.39, существует борелевское множество $B \subset XN$ такое, что $A = \text{proj}_X(B)$. Определим функцию $\psi: B \rightarrow Y$, полагая

$\psi(x, z) = f(x)$. Тогда ψ — борелевская функция, и следствие 7.14.1 показывает, что $\text{Gr}(\psi) \in \mathcal{B}_{X \times Y}$. Наконец, $f(A) = \text{proj}_Y[\text{Gr}(\psi)]$ является аналитическим множеством в силу предложения 7.39.

Если $B \subset Y$ — аналитическое множество, то $B = N(S)$, где S является некоторой системой Суслина для F_Y . Тогда $f^{-1}(B) = N(f^{-1} \circ S)$, где $f^{-1} \circ S$ представляет собой систему Суслина для $\mathcal{B}_X$, определенную формулой $(f^{-1} \circ S)(s) = f^{-1}[S(s)] \quad \forall s \in \Sigma$.

Аналитичность множества $f^{-1}(B)$ следует из предложения 7.36. $\square$

Суммируем теперь эквивалентные определения аналитических множеств в борелевских пространствах.

Предложение 7.41. Пусть X — борелевское пространство. Следующие определения семейства аналитических подмножеств пространства X эквивалентны:

- (а) $S(F_X)$;
- (б) $S(\mathcal{B}_X)$;
- (в) пустое множество и образы пространства N при непрерывных отображениях N в X ;
- (г) проекции в X замкнутых подмножеств в XN ;
- (д) проекции в X борелевских подмножеств в XY , где Y — несчетное борелевское пространство;
- (е) образы борелевских множеств в Y при измеримых по Борелю отображениях Y в X , где Y — несчетное борелевское пространство.

Доказательство. Единственная новая характеристика содержится здесь в (е). Если Y является несчетным борелевским пространством и функция $f: Y \rightarrow X$ измерима по Борелю, то в силу предложения 7.40 $f(B)$ является аналитическим множеством в X при любом $B \in \mathcal{B}_Y$. Чтобы показать, что любое непустое аналитическое множество $A \subset X$ может быть получено таким путем, рассмотрим борелевский изоморфизм φ из Y на XN и замкнутое множество $F \subset XN$ такое, что $\text{proj}_X(F) = A$. Положим $B = \varphi^{-1}(F) \subset \mathcal{B}_Y$. Тогда $(\text{proj}_X \circ \varphi)(B) = A$. Если $A = \emptyset$, то $f(\emptyset) = A$ для всех борелевских функций $f: Y \rightarrow X$. $\square$

7.6.2. Свойства измеримости аналитических множеств

В начале этого раздела указывалось, что действительные, в расширенном смысле, функции на борелевском пространстве X , чьи множества нижнего уровня являются аналитическими множествами, естественным образом возникают при минимизации функции нескольких переменных по одной из них. Так как класс аналитических множеств в несчетном борелевском пространстве строго больше борелевской σ -алгебры в нем (приложение Б), то такие функции могут не быть измеримыми по Борелю. Тем не менее их можно интегрировать по любой вероятностной мере на пространстве $(X, \mathcal{B}_X)$. Чтобы показать это, необходимо изучить свойства измеримости аналитических множеств.

Для борелевского пространства X и любой меры $\rho \in P(X)$ определим ρ -внешнюю меру на X , которую будем обозначать через ρ^* , полагая для любого подмножества E пространства X

$$\rho^*(E) = \inf \{ \rho(B) \mid E \subset B, B \in \mathcal{B}_X \}. \quad (87)$$

Внешняя мера возрастающей последовательности множеств обладает следующим свойством сходимости: $\rho^*(E_n), \uparrow \rho^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$, если $E_1 \subset E_2 \subset \dots$. Это легко получить из формулы (87), а также из уравнения (5) и предложе-

ния А.1 приложения А (см. также Аш [7, лемма 1.3.3])^{*}). Семейство $V_X(p)$ множеств таких, что

$$V_X(p) = \{E \subset X \mid p^*(E) + p^*(E^c) = 1\},$$

является σ -алгеброй (Аш [7, теорема 1.3.5])^{**}), называемой *пополнением σ -алгебры V_X относительно меры p* . Оно может быть представлено как класс всех множеств вида $B \cup N$, где B пробегает V_X , а N пробегает подмножества множеств p -меры нуль в V_X (Аш [7, с. 18])^{***}), при этом $p^*(B \cup N) = p(B)$. Более того, ограничение функции p^* на $V_X(p)$ является вероятностной мерой и притом единственным продолжением функции p на $V_X(p)$, которое является вероятностной мерой. В дальнейшем будем обозначать эту меру также через p и писать $p(E)$ вместо $p^*(E)$ для всех множеств $E \subset V_X(p)$.

Определение 7.18. Пусть X — борелевское пространство. *Универсальная σ -алгебра U_X* определяется как $U_X = \bigcap_{p \in P(X)} V_X(p)$. Если $E \in U_X$, то будем говорить, что множество E *универсально измеримо*.

Полезность аналитических множеств в теории меры в большой степени проявляется из следующего утверждения.

Предложение 7.42. (теорема Лузина). Пусть X — борелевское пространство и S — система Суслина для U_X . Тогда множество $N(S)$ универсально измеримо. Другими словами, $S(U_X) = U_X$.

Доказательство. Обозначим $A = N(S)$, где S — система Суслина для U_X . Для конечной последовательности $(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \Sigma$ определим множества

$$N(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \mid \xi_1 = \sigma_1, \dots, \xi_k = \sigma_k\} \quad (88)$$

и

$$\begin{aligned} M(\sigma_1, \dots, \sigma_k) &= \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \mid \xi_1 \leq \sigma_1, \dots, \xi_k \leq \sigma_k\} = \\ &= \bigcup_{\tau_1 \leq \sigma_1, \dots, \tau_k \leq \sigma_k} N(\tau_1, \dots, \tau_k). \end{aligned} \quad (89)$$

Определим также множество

$$R(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \bigcup_{z \in M(\sigma_1, \dots, \sigma_k)} \bigcap_{s < z} S(s). \quad (90)$$

Тогда

$$R(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \subset K(\sigma_1, \dots, \sigma_k), \quad (91)$$

где

$$K(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \bigcup_{\tau_1 \leq \sigma_1, \dots, \tau_k \leq \sigma_k} \bigcap_{j=1}^k S(\tau_1, \dots, \tau_j). \quad (92)$$

Когда $\sigma_1 \uparrow \infty$, то $M(\sigma_1) \uparrow N$ и $R(\sigma_1) \uparrow A$. Точно так же, если $\sigma_k \uparrow \infty$, то $M(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k) \uparrow M(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$ и $R(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_k) \uparrow R(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$. Для любой меры $p \in P(X)$ и произвольного числа $\epsilon > 0$ выберем последовательность $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots$ такую, что

$$p^*(A) \leq p^*[R(\bar{\xi}_1)] + (\epsilon/2),$$

$$p^*[R(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{k-1})] \leq p^*[R(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{k-1}, \bar{\xi}_k)] + (\epsilon/2^k), \quad k = 2, 3, \dots$$

^{*}) Или Халмош [37, § 10]. (Прим. ред.)

^{**}) Халмош [37], § 11 и 13. (Прим. ред.)

^{***}) См. там же. (Прим. ред.)

Тогда

$$p^*(A) \leq p^*[K(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)] + \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots \quad (93)$$

Множество $K(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)$ универсально измеримо, поэтому из включения (91) и неравенства (93) вытекает, что

$$\begin{aligned} 1 &= p[K(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)] + p[X - K(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)] > \\ &\geq p^*[K(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)] + p[X - K(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)] > \\ &\geq p^*(A) - \epsilon + p[X - K(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_k)]. \end{aligned} \quad (94)$$

Покажем, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} K(\xi_1, \dots, \xi_k) \subset A \quad \forall (\xi_1, \xi_2, \dots) \in N. \quad (95)$$

Если

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} K(\xi_1, \dots, \xi_k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\tau_1 < \xi_1, \dots, \tau_k < \xi_k} \bigcap_{j=1}^k S(\tau_1, \dots, \tau_j), \quad (96)$$

рассуждением от противного покажем, что

$$x \in S(\bar{\tau}_1) \cap \left[\bigcap_{k=2}^{\infty} \bigcup_{\tau_2 < \xi_2, \dots, \tau_k < \xi_k} \bigcap_{j=2}^k S(\bar{\tau}_1, \tau_2, \dots, \tau_j) \right] \quad (97)$$

для некоторого числа $\bar{\tau}_1 \leq \xi_1$. Если такого числа не существует, то для всех $\tau_1 \leq \xi_1$ должно существовать положительное целое число $k(\tau_1)$, для которого

$$x \notin S(\tau_1) \cap \left[\bigcap_{k=2}^{k(\tau_1)} \bigcup_{\tau_2 < \xi_2, \dots, \tau_k < \xi_k} \bigcap_{j=2}^k S(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j) \right].$$

Если $\bar{k} = \max_{\tau_1 < \xi_1} k(\tau_1)$, то

$$x \notin \bigcup_{\tau_1 < \xi_1} \left\{ S(\tau_1) \cap \left[\bigcap_{k=2}^{\bar{k}} \bigcup_{\tau_2 < \xi_2, \dots, \tau_k < \xi_k} \bigcap_{j=2}^k S(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j) \right] \right\} \supset$$

$$\supset \bigcup_{\tau_1 < \xi_1, \dots, \tau_{\bar{k}} < \xi_{\bar{k}}} \bigcap_{j=1}^{\bar{k}} S(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j) = K(\xi_1, \dots, \xi_{\bar{k}}),$$

и получаем противоречие.

Применяя то же рассуждение к (97) вместо (96), установим существование числа $\bar{\tau}_2 \leq \xi_2$ такого, что

$$x \in S(\bar{\tau}_1) \cap S(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \cap \left[\bigcap_{k=3}^{\infty} \bigcup_{\tau_3 < \xi_3, \dots, \tau_k < \xi_k} \bigcap_{j=3}^k S(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \tau_3, \dots, \tau_j) \right].$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность чисел $\bar{\tau}_1 \leq \xi_1, \bar{\tau}_2 \leq \xi_2, \dots$ такую, что

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S(\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_k) \subset N(S) = A.$$

Это доказывает включение (95), так как при $k \rightarrow \infty$ множество $K(\xi_1, \dots, \xi_k)$ уменьшается до множества, содержащегося в A , а $X - K(\xi_1, \dots, \xi_k)$ увеличивается до множества, содержащегося в $X - A$. Полагая $k \rightarrow \infty$ в формуле (94), получим неравенство

$$1 \geq p^*(A) - \epsilon + p^*(X - A).$$

Так как $\epsilon > 0$ произвольно, то

$$1 \geq p^*(A) + p^*(X - A).$$

С другой стороны, для любого множества $E \subset X$ справедливо неравенство $p^*(E) + p^*(X - E) \geq 1$, значит,

$$p^*(A) + p^*(X - A) = 1,$$

и множество A измеримо относительно меры p . $\square$

Следствие 7.42.1. Пусть X — борелевское пространство. Тогда любое аналитическое подмножество из X универсально измеримо.

Доказательство. Замкнутые множества в X универсально измеримы, поэтому $S(F_X) \subset U_X$ по предложению 7.42. $\square$

Как отмечалось ранее, класс аналитических множеств в несчетном борелевском пространстве не является σ -алгеброй, поэтому существуют универсально измеримые множества, которые не являются аналитическими. Действительно, в приложении Б показано, что в любом несчетном борелевском пространстве универсальная σ -алгебра строго больше, чем σ -алгебра, порожденная аналитическими множествами.

7.6.3. Аналитическое множество вероятностных мер

В предложении 7.25 было показано, что когда X является борелевским пространством, то функция $\theta_A: P(X) \rightarrow [0, 1]$, определенная как $\theta_A(p) = p(A)$, является борелевской для любого борелевского множества $A \subset X$. Теперь исследуем свойства этой функции, когда множество A аналитическое. Основной результат состоит в том, что множество $\{p \in P(X) | p(A) \geq c\}$ является аналитическим для каждого действительного числа c .

Предложение 7.43. Пусть X — борелевское пространство и A — аналитическое множество в X . Для любого числа $c \in R$ множество $\{p \in P(X) | p(A) \geq c\}$ является аналитическим.

Доказательство. Пусть S — такая система Суслина для класса F_X замкнутых подмножеств из X , что $A = N(S)$. Для элемента $s \in \Sigma$ пусть множества $N(s)$, $M(s)$, $R(s)$ и $K(s)$ определяются соотношениями (88) — (90) и (92). Тогда выполняются соотношения (91) и (95), а любое множество $K(s)$ замкнуто. Покажем, что для любого $c \in R$ справедливо равенство

$$\{p \in P(X) | p(A) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} \{p \in P(X) | p[K(s)] \geq c - (1/n)\}. \quad (98)$$

Если $\bar{p}(A) \geq c$, то для любого $n \geq 1$ существует последовательность $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots) \in N$ такая, что неравенство (93) верно при $p = \bar{p}$ и $\epsilon = 1/n$. Тогда из включения (91) следует, что

$$\bar{p}[K(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k)] \geq \bar{p}[R(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k)] \geq \bar{p}(A) - (1/n) \geq c - (1/n), \quad k = 1, 2, \dots,$$

поэтому

$$\bar{p} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} \{p \in P(X) | p[K(s)] \geq c - (1/n)\}.$$

С другой стороны, если дано, что

$$\bar{p} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} \{p \in P(X) | p[K(s)] \geq c - (1/n)\},$$

то для любого n существует последовательность $(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N$, для которой

$$\bar{p} \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} K(\xi_1, \dots, \xi_k) \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{p} [K(\xi_1, \dots, \xi_k)] \geq c - (1/n).$$

Тогда из включения (95) следует, что

$$\bar{p}(A) \geq c - (1/n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

поэтому $\bar{p}(A) \geq c$, и равенство (98) доказано.

Предложение 7.25 гарантирует, что для любых $n \geq 1$ и $s \in \Sigma$ множество

$$T_n(s) = \{p \in P(X) \mid p[K(s)] \geq c - (1/n)\}$$

является борелевским в $P(X)$. Из равенства (98) следует, что

$$\{p \in P(X) \mid \bar{p}(A) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} N(T_n),$$

и требуемое утверждение следует из предложения 7.36 и следствия 7.35.2. $\square$

Следствие 7.43.1. Пусть X — борелевское пространство и A — аналитическое множество в X . Тогда для любого числа $c \in R$ множество $\{p \in P(X) \mid p(A) > c\}$ является аналитическим.

Доказательство. Для любого числа $c \in R$ имеем

$$\{p \in P(X) \mid p(A) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p \in P(X) \mid p(A) \geq c + (1/n)\}.$$

Требуемый результат получается из следствия 7.35.2 и предложения 7.43. $\square$

7.7. Полуаналитические снизу функции и универсально измеримый выбор

В борелевском пространстве X существуют по крайней мере три естественные σ -алгебры^{*)}: борелевская σ -алгебра B_X (определение 7.6), универсальная σ -алгебра U_X (определение 7.18) и аналитическая σ -алгебра A_X , которая сейчас будет определена.

Определение 7.19. Пусть X — борелевское пространство. Аналитической σ -алгеброй A_X называется наименьшая σ -алгебра, содержащая аналитические множества в X . Символически $A_X = \sigma[S(F_X)]$. Если $E \in A_X$, то будем говорить, что E — аналитически измеримое множество.

Из предложения 7.36 и теоремы Лузина (предложение 7.42) следует, что для любого борелевского пространства X выполняются включения $B_X \subset S(F_X) \subset A_X \subset U_X$. Если X — счетное пространство, то каждое из этих семейств множеств совпадает с множеством всех подмножеств пространства X . В приложении Б показано, что если X несчетно, то каждое из вышеупомянутых включений является строгим. Этот факт не будет использоваться в конструктивной части развиваемой теории, он только позволяет строить примеры, показывающие, что получаемые результаты нельзя усилить.

Мы будем иметь дело с тремя типами измеримости функций, соответствующими этим трем σ -алгебрам. Функции, измеримые по Борелю (иначе — борелевские функции), были введены в определении 7.8. Остальные два типа определяются ниже.

^{*)} Четвертая σ -алгебра — предельная σ -алгебра L_X , заключенная между A_X и U_X , определяется в дополнении Б и рассматривается там же и в разделе 11.1.

Определение 7.20. Пусть X и Y — борелевские пространства и f — функция, отображающая множество $D \subset X$ в Y . Если $D \in \mathcal{A}_X$ и $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X$ для всех множеств $B \in \mathcal{B}_Y$, то говорят, что f — *аналитически измеримая функция*. Если $D \in \mathcal{U}_X$ и $f^{-1}(B) \in \mathcal{U}_X$ для всех множеств $B \in \mathcal{B}_Y$, то говорят, что функция f *универсально измерима*.

Предыдущее обсуждение показывает, что любая борелевская функция аналитически измерима, а любая аналитически измеримая функция универсально измерима. Обращение этих утверждений неверно.

Установим сначала следующую характеристику универсальной σ -алгебры, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 7.26. Пусть X — борелевское пространство и $E \subset X$. Множество $E \in \mathcal{U}_X$ тогда и только тогда, когда для любой меры $\rho \in P(X)$ существует множество $B \in \mathcal{B}_X$ такое, что $\rho(E \Delta B) = 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о суперпозиции измеримых функций. Суперпозиция борелевских функций снова измерима по Борелю. К сожалению, суперпозиция аналитически измеримых функций может не быть аналитически измеримой (см. приложение Б). Для универсально измеримых функций имеет место следующий результат.

Предложение 7.44. Пусть X, Y и Z — борелевские пространства, $D \in \mathcal{U}_X$, $E \in \mathcal{U}_Y$. Предположим, что функции $f: D \rightarrow Y$ и $g: E \rightarrow Z$ универсально измеримы и $f(D) \subset E$. Тогда суперпозиция $g \circ f$ функций g и f универсально измерима.

Доказательство. Нужно показать, что для любого множества $B \in \mathcal{B}_Z$ множество $f^{-1}[g^{-1}(B)]$ универсально измеримо. Так как $g^{-1}(B) \in \mathcal{U}_Y$, достаточно показать, что $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$ для всех множеств $U \in \mathcal{U}_Y$. Для любой меры $\rho \in P(X)$ определим меру $\rho' \in P(Y)$ формулой

$$\rho'(C) = \rho[f^{-1}(C)] \quad \forall C \in \mathcal{B}_Y.$$

Пусть множество $V \in \mathcal{B}_Y$ такое, что

$$\rho[f^{-1}(V) \Delta f^{-1}(U)] = \rho'(V \Delta U) = 0.$$

Множество $f^{-1}(V)$ принадлежит $\mathcal{U}_X$, поэтому существует множество $W \in \mathcal{B}_X$, для которого $\rho[W \Delta f^{-1}(V)] = 0$. Тогда $\rho[W \Delta f^{-1}(U)] = 0$. Требуемый результат следует из леммы 7.26. $\square$

Доказательство предложения 7.44 попутно устанавливает еще и следующий факт.

Следствие 7.44.1. Пусть X и Y — борелевские пространства, $D \in \mathcal{U}_X$ и $f: D \rightarrow Y$ — универсально измеримая функция. Если $U \in \mathcal{U}_Y$, то $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X$.

Так как $\mathcal{A}_X \subset \mathcal{U}_X$, эти результаты можно приспособить и для аналитически измеримых множеств и функций.

Следствие 7.44.2. Пусть X, Y и Z — борелевские пространства, $D \in \mathcal{A}_X$, $E \in \mathcal{A}_Y$. Предположим, что функции $f: D \rightarrow Y$ и $g: E \rightarrow Z$ аналитически измеримы и $f(D) \subset E$. Тогда суперпозиция $g \circ f$ функций g и f универсально измерима. Если $A \in \mathcal{A}_Y$, то $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}_X$.

Напомним читателю, что для борелевских пространств X и Y стохастическое ядро $q(dy | x)$ на Y при условии X универсально измеримо, если отображение $\gamma(x) = q(dy | x)$ из X в $P(Y)$ универсально измеримо (см. определение 7.12).

Следствие 7.44.3. Пусть X и Y — борелевские пространства, и пусть $q(dy | x)$ — стохастическое ядро на Y при условии X такое, что $q(dy | x)$ для любой точки x приписывает точке $f(x) \in Y$ вероятность, равную едини-

це. Тогда $q(dy|x)$ универсально измеримо тогда и только тогда, когда функция f универсально измерима.

Доказательство. Пусть $\delta: Y \rightarrow P(Y)$ — гомеоморфизм, определенный соотношением $\delta(y) = p_y$ (следствие 7.21.1), а $\gamma: X \rightarrow P(Y)$ — отображение $\gamma(x) = q(dy|x)$. Тогда $\gamma = \delta \circ f$ и $f = \delta^{-1} \circ \gamma$. Требуемый результат следует из предложения 7.44. $\square$

Если X — борелевское пространство и $f: X \rightarrow R^*$ — универсально измеримая функция, то для любой меры $p \in P(X)$ функция f измерима относительно пополненной борелевской σ -алгебры $B_X(p)$, и интеграл $\int f dp$ определяется формулой

$$\int f dp = \int f^+ dp - \int f^- dp,$$

где применяется соглашение $\infty - \infty = \infty$, а интегрирование выполняется на пространстве с мерой $(X, B_X(p), p)$. Если $D \in U_X$, то интеграл $\int_D f dp$ определяется аналогичным образом. Имея, таким образом, интеграл, определенный без использования p -внешней меры, можно теперь применять все теоремы классического интегрирования, заботясь лишь об аккуратном сложении бесконечностей.

Покажем теперь, что универсально измеримые стохастические ядра можно использовать для определения вероятностных мер на произведении пространств, как это было в предложении 7.28. Для этого потребуются несколько вспомогательных лемм.

Лемма 7.27. Пусть даны борелевское пространство X и функция $f: X \rightarrow R^*$. Функция f универсально измерима тогда и только тогда, когда для любой меры $p \in P(X)$ существует измеримая по Борелю функция $f_p: X \rightarrow R^*$ такая, что $f(x) = f_p(x)$ для почти всех по мере p точек x .

Доказательство. Предположим, что функция f — универсально измерима, и пусть задана мера $p \in P(X)$. Положим $U(r) = \{x \mid f(x) \leq r\}$ для $r \in Q^*$. Тогда $f(x) = \inf \{r \in Q^* \mid x \in U(r)\}$. Пусть множество $B(r) \in B_X$ такое, что $p[B(r) \Delta U(r)] = 0$. Положим*)

$$f_p(x) = \inf \{r \in Q^* \mid x \in B(r)\} = \inf_{r \in Q^*} \psi_r(x),$$

где $\psi_r(x) = r$, если $x \in B(r)$ и $\psi_r(x) = \infty$ в противном случае. Тогда функция $f_p: X \rightarrow R^*$ измерима по Борелю, а множество

$$\{x \mid f(x) \neq f_p(x)\} \subset \bigcup_{r \in Q^*} [B(r) \Delta U(r)]$$

имеет меру p , равную нулю.

Обратно, если для любой меры $p \in P(X)$ существует борелевская функция f_p такая, что $f(x) = f_p(x)$ для почти всех по мере p точек x , то

$$p(\{x \mid f(x) \leq c\} \Delta \{x \mid f_p(x) \leq c\}) = 0$$

для любого числа $c \in R^*$, откуда следует универсальная измеримость функции f . $\square$

Лемму 7.27 можно использовать для еще одного определения интеграла $\int f dp$ в случае, когда f является универсально измеримой действительной в расширенном смысле функцией на борелевском пространстве X и $p \in P(X)$. Полагая функцию f_p такой же, как в лемме 7.27, можно определить $\int f dp =$

) Q^ — множество действительных рациональных чисел, $Q^* = Q \cup \{-\infty, +\infty\}$. (Прим. ред.)

$= \int f_p d\rho$. Легко показать, что это определение эквивалентно определению, предшествующему лемме 7.27.

Лемма 7.28. Пусть X и Y — борелевские пространства, и пусть $q(dy | x)$ — стохастическое ядро на Y при условии X . Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) стохастическое ядро $q(dy | x)$ универсально измеримо;
- (б) для любого множества $B \in \mathcal{B}_Y$ отображение $\lambda_B: X \rightarrow R$, определенное как $\lambda_B(x) = q(B | x)$, универсально измеримо;
- (в) для любой меры $\rho \in P(X)$ существует борелевское стохастическое ядро $q_\rho(dy | x)$ на Y при условии X такое, что $q(dy | x) = q_\rho(dy | x)$ для почти всех по мере ρ точек x .

Доказательство. Покажем, что (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (а). Пусть выполнено (а). Тогда функция $\gamma: X \rightarrow P(Y)$, задаваемая как $\gamma(x) = q(dy | x)$, универсально измерима. Если $B \in \mathcal{B}_X$ и λ_B определяется, как в (б), а $\theta_B: P(Y) \rightarrow R$ задается формулой $\theta_B(\rho) = \rho(B)$, тогда отображение $\lambda_B = \theta_B \circ \gamma$ универсально измеримо в силу предложений 7.25 и 7.44. Следовательно, (а) $\Rightarrow$ (б).

Предположим, что выполнено (б), и выберем меру $\rho \in P(X)$. Так как Y — сепарабельное метризуемое пространство, то существует счетная база $\mathcal{B}$ топологии в Y . Пусть $\mathcal{F}$ — совокупность всех множеств из $\mathcal{B}$ и всех их конечных пересечений. Для множества $F \in \mathcal{F}$ пусть f_F будет борелевской функцией, для которой $f_F(x) = q(F | x) \quad \forall x \in B_F$, где $B_F \in \mathcal{B}_X$ и $\rho(B_F) = 1$. Такие функция f_F и множество B_F существуют, согласно сделанному предположению (б) и лемме 7.27. Для $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} B_F$ пусть $q_\rho(dy | x) = q(dy | x)$. Для $x \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}} B_F$ пусть $q_\rho(dy | x)$ будет некоторой фиксированной мерой из $P(Y)$. Тогда $q(dy | x) = q_\rho(dy | x)$ для почти всех по мере ρ точек x . Класс тех множеств $\underline{Y}$ из $\mathcal{B}_Y$, для которого функция $q_\rho(\underline{Y} | x)$ измерима по Борелю по аргументу x , является системой Дынкина, содержащей $\mathcal{F}$. Класс $\mathcal{F}$ замкнут относительно конечных пересечений и порождает $\mathcal{B}_Y$, поэтому утверждение (в) следует из теоремы о системе Дынкина (предложение (7.24)). Следовательно, (б) $\Rightarrow$ (в).

Предположим, что выполнено (в), и выберем меру $\rho \in P(X)$. Пусть $q_\rho(dy | x)$ определяется, как в предположении (в), и определим отображения $\gamma, \gamma_\rho: X \rightarrow P(Y)$, как $\gamma(x) = q(dy | x)$ и $\gamma_\rho(x) = q_\rho(dy | x)$. Если $B \in \mathcal{B}_{P(X)}$, то $\rho[\gamma^{-1}(B) \Delta \gamma_\rho^{-1}(B)] = 0$. В силу леммы 7.26 множество $\gamma^{-1}(B)$ универсально измеримо. Следовательно, (в) $\Rightarrow$ (а). $\square$

Лемма 7.29. Пусть X, Y и Z — борелевские пространства, и пусть $f: XY \rightarrow Z$ — универсально измеримая функция. Для фиксированного $x \in X$ определим функцию $g_x: Y \rightarrow Z$ формулой $g_x(y) = f(x, y)$. Тогда функция g_x универсально измерима при любом $x \in X$.

Доказательство. Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Пусть $\varphi: Y \rightarrow XY$ — непрерывная функция, равная $\varphi(y) = (x_0, y)$. Для любого $Z \in \mathcal{B}_Z$ имеем $\{y \in Y | g_{x_0}(y) \in Z\} = \varphi^{-1}(\{(x, y) \in XY | f(x, y) \in Z\})$

и это множество универсально измеримо по следствию 7.44.1. $\square$

Стоит отметить, что для вероятностных пространств $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \rho)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, q)$ существуют две естественные σ -алгебры на $\Omega_1 \Omega_2$, а именно, $\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ и замыкание $\overline{\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2}$ σ -алгебры $\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ относительно меры ρq . Если функция $f: \Omega_1 \Omega_2 \rightarrow R$ является $\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2$ -измеримой, то для любой точки $\omega_1 \in \Omega_1$ функция $g_{\omega_1}(\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$ является $\mathcal{F}_2$ -измеримой. Однако если

функция f только $\overline{F_1 F_2}$ -измерима, то можно утверждать, что $g_{\omega_1}(\omega_2)$ является F_2 -измеримой лишь для почти всех по мере p точек ω_1 . Случай, исследуемый в лемме 7.29, является промежуточным среди этих двух, так как $U_X U_Y \subset U_{XY}$, и если $p \in P(X)$, $q \in P(Y)$, а $\overline{U_X U_Y}$ обозначает замыкание $U_X U_Y$ относительно меры pq , то $U_{XY} \subset \overline{U_X U_Y}$. Отметим, что имеет место более сильный результат, а именно, $g_x(y)$ является U_Y -измеримой функцией для всех $x \in X$, хотя предположение, что функция f является U_{XY} -измеримой, может быть слабее, чем предположение о ее $U_X U_Y$ -измеримости.

Используем теперь свойства универсальной измеримости функций для расширения предложения 7.28.

Предложение 7.45. Пусть $X_1, X_2, \dots$ — последовательность борелевских пространств, $Y_n = X_1 X_2 \dots X_n$, $Y = X_1 X_2 \dots$. Пусть заданы мера $p \in P(X_1)$ и универсально измеримые стохастические ядра $q_n(dx_{n+1}|Y_n)$ на X_{n+1} при условии Y_n , $n = 1, 2, \dots$. Тогда существуют единственные вероятностные меры $r_n \in P(Y_n)$ такие, что

$$\begin{aligned} r_n(X_1 X_2 \dots X_n) &= \int_{X_1} \int_{X_2} \dots \int_{X_{n-1}} q_{n-1}(X_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \times \\ &\times q_{n-2}(dx_{n-1} | x_1, x_2, \dots, x_{n-2}) \dots q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1) \\ \forall X_1 \in B_{X_1}, \dots, X_n \in B_{X_n}, \quad n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (99)$$

Если функция $f: Y_n \rightarrow R^*$ универсально измерима и либо $\int f^+ dr_n < \infty$, либо $\int f^- dr_n < \infty$, то

$$\begin{aligned} \int_{Y_n} f dr_n &= \int_{X_1} \int_{X_2} \dots \int_{X_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ &\times q_{n-1}(dx_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \dots q_1(dx_2 | x_1) p(dx_1). \end{aligned} \quad (100)$$

Более того, существует единственная мера $r \in P(Y)$ такая, что для каждого n проекция меры r на Y_n равна r_n .

Доказательство. Существует борелевское стохастическое ядро $\bar{q}_1(dx_2|x_1)$, которое совпадает с $q_1(dx_2|x_1)$ при почти всех по мере p значениях x_1 . Определим меру $r_2 \in P(Y_2)$, полагая ее на измеримых прямоугольниках, равной

$$r_2(X_1 X_2) = \int_{X_1} \bar{q}_1(X_2 | x_1) p(dx_1) \quad \forall X_1 \in B_{X_1}, \quad X_2 \in B_{X_2}$$

(см. предложение 7.28). Предположим, что $f: Y_2 \rightarrow [0, \infty]$ универсально измерима, и пусть $\bar{f}: Y_2 \rightarrow [0, \infty]$ — борелевская функция, совпадающая с f на $Y_2 - N$, где $N \in B_{Y_2}$ и $r_2(N) = 0$. В силу предложения 7.28 имеем

$$\begin{aligned} 0 &= r_2(N) = \int_{X_1} \int_{X_2} \chi_N(x_1, x_2) \bar{q}_1(dx_2 | x_1) p(dx_1) = \\ &= \int_{X_1} \bar{q}_1(N_{x_1} | x_1) p(dx_1), \end{aligned}$$

поэтому $\bar{q}_1(N_{x_1} | x_1) = 0$ для почти всех по мере p точек x_1 . Поскольку $f(x_1, x_2) = \bar{f}(x_1, x_2)$ для $x_2 \notin N_{x_1}$, то

$$\begin{aligned} & \left| \int_{X_2} [f(x_1, x_2) - \bar{f}(x_1, x_2)] \bar{q}_1(dx_2 | x_1) \right| \leq \\ & \leq \int_{N_{x_1}} |f(x_1, x_2) - \bar{f}(x_1, x_2)| \bar{q}_1(dx_2 | x_1) = 0 \end{aligned}$$

для почти всех по мере p значений x_1 . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{X_2} \bar{f}(x_1, x_2) \bar{q}_1(dx_2|x_1) &= \int_{X_2} f(x_1, x_2) \bar{q}_1(dx_2|x_1) = \\ &= \int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2|x_1) \end{aligned}$$

для почти всех по мере p значений x_1 . Здесь левая часть измерима по Борелю в силу предложения 7.29, поэтому правая часть универсально измерима по лемме 7.27. Далее

$$\begin{aligned} \int_{Y_2} f dr_2 &= \int_{Y_2} \bar{f} dr_2 = \int_{X_1} \int_{X_2} \bar{f}(x_1, x_2) \bar{q}_1(dx_2|x_1) p(dx_1) = \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} f(x_1, x_2) q_1(dx_2|x_1) p(dx_1). \end{aligned}$$

Это доказывает равенство (100) для случая $n = 2$ и $f \geq 0$. Если функция $f: Y_2 \rightarrow R^*$ универсально измерима и удовлетворяет условию $\int f^+ dr_2 < \infty$ или $\int f^- dr_2 < \infty$, то равенство (100) выполняется для f^+ и f^- , а следовательно, оно выполняется и для f . Взяв $f = \chi_{\underline{X}_1 \underline{X}_2}$, получаем формулу (99).

Предположим теперь, что утверждение доказано для $n = k$. Пусть $\bar{q}_k(dx_{k+1}|y_k)$ — стохастическое ядро, совпадающее с $q_k(dx_{k+1}|y_k)$ для почти всех по мере r_k точек x_k . Определим меру r_{k+1} , полагая ее на измеримых прямоугольниках равной

$$r_{k+1}(\underline{X}_1 \underline{X}_2 \dots \underline{X}_{k+1}) = \int_{\underline{X}_1 \underline{X}_2 \dots \underline{X}_k} \bar{q}_k(\underline{X}_{k+1}|x_1, x_2, \dots, x_k) dr_k$$

$$\forall \underline{X}_1 \in B_{X_1}, \dots, \underline{X}_{k+1} \in B_{X_{k+1}}.$$

Затем утверждение для значения $n = k + 1$ доказывается так же, как и для случая $n = 2$ (см. также доказательство предложения 7.28). Существование меры $r \in P(Y)$ с проекциями на X_n , равными r_n , $n = 2, 3, \dots$, доказывается точно так же, как в предложении 7.28. $\square$

В ходе доказательства предложения 7.45 нами установлен еще и следующий факт.

Предложение 7.46. Пусть X и Y — борелевские пространства, и пусть функция $f: XY \rightarrow R^*$ универсально измерима. Пусть $q(dy|x)$ — универсально измеримое стохастическое ядро на Y при условии X . Тогда отображение $\lambda: X \rightarrow R^*$, определенное формулой

$$\lambda(x) = \int f(x, y) q(dy|x),$$

универсально измеримо.

Следствие 7.46.1. Пусть X — борелевское пространство, и пусть функция $f: X \rightarrow R^*$ универсально измерима. Тогда функция $\theta_f: P(X) \rightarrow R^*$, определенная формулой

$$\theta_f(p) = \int f dp,$$

универсально измерима.

Доказательство. Определим универсально измеримое стохастическое ядро на X при условии $P(X)$, полагая $q(dx|p) = p(dx)$. Результат следует из предложения 7.46. $\square$

Как упоминалось ранее, функция, получаемая в результате минимизации по одной переменной действительной в расширенном смысле борелевской функции двух переменных, имеет аналитические множества нижнего уровня. Дадим этим функциям специальное название.

Определение 7.21. Пусть даны борелевское пространство X , множество $D \subset X$ и функция $f: D \rightarrow R^*$. Если D — аналитическое множество и множество $\{x \in D \mid f(x) < c\}$ является аналитическим при любом $c \in R$, то будем называть функцию f *полуаналитической снизу*.

Из определения видно, что полуаналитическая снизу функция аналитически измерима. В следующей лемме установим некоторые характеристики и основные свойства полуаналитических снизу функций.

Лемма 7.30.

(1) Пусть X — борелевское пространство, D — аналитическое множество в X и f — функция, $f: D \rightarrow R^*$. Следующие утверждения эквивалентны:

(а) функция f является полуаналитической снизу, т.е. множество

$$\{x \in D \mid f(x) < c\} \quad (101)$$

является аналитическим для всех $c \in R$;

(б) множество (101) является аналитическим для всех $c \in R^*$;

(в) множество

$$\{x \in D \mid f(x) \leq c\} \quad (102)$$

является аналитическим для всех $c \in R$;

(г) множество (102) является аналитическим для всех $c \in R^*$.

(2) Пусть X — борелевское пространство, D — аналитическое множество в X и $f_n: D \rightarrow R^*$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность полуаналитических снизу функций. Тогда функции $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ являются полуаналитическими снизу. В частности, если $f_n \rightarrow f$, то f — полуаналитическая снизу функция.

(3) Пусть X и Y — борелевские пространства, $g: X \rightarrow Y$ и $f: g(X) \rightarrow R^*$. Если функция g борелевская, а функция f — полуаналитическая снизу, то функция $f \circ g$ является полуаналитической снизу.

(4) Пусть X — борелевское пространство, D — аналитическое множество в X и даны функции $f, g: D \rightarrow R^*$. Если функции f и g полуаналитические снизу, то функция $f + g$ полуаналитическая снизу. Если, кроме того, функция g борелевская и $g \geq 0$ или если $f \geq 0$ и $g \geq 0$, то функция fg полуаналитическая снизу (здесь, по определению, $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0(-\infty) = (-\infty)0 = 0$).

Доказательство.

(1) Покажем, что $(б) \Rightarrow (а) \Rightarrow (г) \Rightarrow (в) \Rightarrow (б)$. Ясно, что $(б) \Rightarrow (а)$. Если выполнено (а), то множество $\{x \in D \mid f(x) \leq \infty\} = D$ аналитическое по определению, в то время как множества

$$\{x \in D \mid f(x) \leq -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in D \mid f(x) < -n\},$$

$$\{x \in D \mid f(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in D \mid f(x) < c + (1/n)\}, \quad c \in R,$$

аналитические в силу следствия 7.35.2. Следовательно, $(а) \Rightarrow (г)$. Ясно, что $(в) \Rightarrow (б)$. Если выполнено (в), то множества

$$\{x \in D \mid f(x) < -\infty\} = \emptyset,$$

$$\{x \in D \mid f(x) < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in D \mid f(x) \leq n\},$$

$$\{x \in D \mid f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in D \mid f(x) \leq c - (1/n)\}, \quad c \in R,$$

являются аналитическими в силу следствия 7.35.2. Поэтому $(в) \Rightarrow (б)$.

(2) Для любого $c \in R$ имеют место равенства

$$\{x \in D \mid \inf_n f_n(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in D \mid f_n(x) < c\},$$

$$\{x \in D \mid \sup_n f_n(x) \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in D \mid f_n(x) \leq c\},$$

поэтому $\inf_n f_n$ и $\sup_n f_n$ являются полуаналитическими снизу функциями в силу следствия 7.35.2 и части (1). Тогда функции

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k$$

являются также полуаналитическими снизу.

(3) Область определения $g(X)$ функции f является аналитическим множеством в силу предложения 7.40. Для любого $c \in R$ множество

$$\{x \in X \mid (f \circ g)(x) < c\} = g^{-1}(\{y \in g(X) \mid f(y) < c\})$$

является аналитическим в силу того же предложения.

(4) Для любого $c \in R$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \{x \in D \mid f(x) + g(x) < c\} &= \\ &= \bigcup_{r \in Q} [\{x \in D \mid f(x) < r\} \cap \{x \in D \mid g(x) < c - r\}], \end{aligned}$$

и это верно, даже если $f(x) + g(x) = \infty - \infty = \infty$ в некоторых точках $x \in D$. Из следствия 7.35.2 получаем, что $f + g$ — полуаналитическая снизу функция, если только таковыми являются функции f и g . Предположим теперь, что g — борелевская функция и $g \geq 0$. Для любого $c > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \{x \in D \mid f(x)g(x) < c\} &= \\ &= \{x \in D \mid f(x) \leq 0\} \cup \{x \in D \mid g(x) \leq 0\} \cup \\ &\cup \left[\bigcup_{r \in Q, r > 0} \{x \in D \mid f(x) < r, g(x) < c/r\} \right], \end{aligned}$$

если же $c \leq 0$, то

$$\{x \in D \mid f(x)g(x) < c\} = \bigcup_{r \in Q, r < 0} \{x \in D \mid f(x) < r, g(x) > c/r\}.$$

В обоих случаях множество $\{x \in D \mid f(x)g(x) < c\}$ является аналитическим в силу следствия 7.35.2.

Предположим, что и f и g — полуаналитические снизу неотрицательные функции. Для числа $c > 0$ множество $\{x \in D \mid f(x)g(x) < c\}$, как и ранее, аналитическое, а для $c \leq 0$ это множество пустое, откуда следует, что произведение fg является полуаналитической снизу функцией при том и другом наборе предположений. $\square$

В связи с леммой 7.30 (3) заметим, что суперпозиция борелевской и полуаналитической снизу функций будет полуаналитической снизу функцией только в том случае, когда суперпозиция происходит в указанном порядке. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим борелевское пространство X и аналитическое множество $A \subset X$, дополнение которого не является аналитическим (см. приложение Б). Положим функцию $f(x) = -\chi_A(x)$; эта функция полуаналитическая снизу, потому что множество $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ равно либо $\emptyset$, либо A , либо X в зависимости от величины c . Пусть функция $g: R^* \rightarrow R^*$ определена равенством $g(c) = -c$. Тогда $\chi_A = g \circ f$ и эта функция не является полуаналитической снизу, так как $\{x \in X \mid \chi_A(x) < \frac{1}{2}\} = A^c$. Это также дает пример аналитически измеримой функции, которая не является полуаналитической снизу.

Предложение 7.47. Пусть X и Y — борелевские пространства, D — аналитическое множество в XY и $f: D \rightarrow R^*$ — полуаналитическая снизу функция. Тогда функция $f^*: \text{proj}_X(D) \rightarrow R^*$, определенная формулой

$$f^*(x) = \inf_{y \in D_x} f(x, y), \quad (103)$$

является полуаналитической снизу. И обратно, если $f^*: X \rightarrow R^*$ — заданная полуаналитическая снизу функция, а Y — несчетное борелевское пространство, то существует борелевская функция $f: XY \rightarrow R^*$, которая удовлетворяет соотношению (103) при $D = XY$.

Доказательство. Для доказательства первой части предложения заметим, что если $f: D \rightarrow R^*$ — полуаналитическая снизу функция и $c \in R$, то множество

$$\{x \in \text{proj}_X(D) \mid \inf_{y \in D_x} f(x, y) < c\} = \text{proj}_X\{(x, y) \in D \mid f(x, y) < c\}$$

является аналитическим в силу предложения 7.39.

Чтобы доказать обратную часть теоремы, рассмотрим полуаналитическую снизу функцию $f^*: X \rightarrow R^*$ и несчетное борелевское пространство Y . Положим $A(r) = \{x \in X \mid f^*(x) < r\}$ для $r \in Q$. Тогда $A(r)$ — аналитическое множество и по предложению 7.39 существует множество $B(r) \in \mathcal{B}_{XY}$ такое, что $A(r) = \text{proj}_X[B(r)]$. Положим $G(r) = \bigcup_{s \in Q, s < r} B(s)$ и определим функцию $f: XY \rightarrow R^*$ равенством

$$f(x, y) = \inf\{r \in Q \mid (x, y) \in G(r)\} = \inf_{r \in Q} \psi_r(x, y),$$

где $\psi_r(x, y) = r$, если $(x, y) \in G(r)$, и $\psi_r(x, y) = \infty$ в противном случае. Тогда функция f измерима по Борелю. Пусть функция g определена равенством $g(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$. Покажем, что $f^*(x) = g(x)$ для всех $x \in X$. Если $f^*(x) < c$ при некотором $c \in R$, то существует такое число $r \in Q$, для которого $f^*(x) < r < c$, и поэтому $x \in A(r)$. Найдется также точка $y \in Y$ такая, что $(x, y) \in G(r)$ и, следовательно, $f(x, y) \leq r$ и $g(x) \leq r < c$. Значит, функция $g(x)$ не может быть больше чем $f^*(x)$.

Если $g(x) < c$ при некотором $c \in R$, то существуют $r \in Q$ и $y \in Y$, для которых $g(x) < r < c$ и $(x, y) \in G(r)$. Поэтому для некоторого $s \in Q$, $s \leq r$, имеем $(x, y) \in B(s)$ и $x \in A(s)$. Отсюда следует, что $f^*(x) < s \leq r < c$, а значит, функция $f^*(x)$ не может быть больше $g(x)$. $\square$

Предложение 7.48. Пусть X и Y — борелевские пространства, $f: XY \rightarrow R^*$ — полуаналитическая снизу функция, $q(dy|x)$ — измеримое по Борелю ядро на Y при условии X . Тогда функция $\lambda: X \rightarrow R^*$, определенная формулой

$$\lambda(x) = \int f(x, y) q(dy|x),$$

является полуаналитической снизу*).

Доказательство. Предположим сначала, что $f \geq 0$. Пусть $f_n(x, y) = \min\{n, f(x, y)\}$. Тогда каждая функция f_n является полуаналитической снизу и $f_n \uparrow f$. Множество

$$E_n = \{(x, y, b) \in XYR \mid f_n(x, y) \leq b \leq n\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{r \in Q} \{(x, y, b) \in XYR \mid f_n(x, y) < r, r \leq b + (1/k) \leq n + (1/k)\}$$

*) Этот результат (для $f > 0$), по-видимому, впервые установлен и применен к задаче стохастического управления Звонкиным [92]. (Прим. ред.)

является аналитическим в XYR в силу следствия 7.35.2 и предложения 7.38. Пусть μ — мера Лебега на R , $p \in P(XY)$ и $p\mu$ — произведение этих мер на XYR . Согласно теореме Фубини,

$$(p\mu)(E_n) = \int_{XY} \int_R \chi_{E_n} d\mu dp = \int_{XY} [n - f_n(x, y)] dp = n - \int_{XY} f_n(x, y) dp.$$

По теореме о монотонном предельном переходе под знаком интеграла для любого числа $c \in R$ имеем

$$\begin{aligned} \{p \in P(XY) \mid \int f(x, y) dp \leq c\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{p \in P(XY) \mid \int f_n(x, y) dp \leq c\} = \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{p \in P(XY) \mid (p\mu)(E_n) \geq n - c\}. \end{aligned}$$

Отсюда по предложению 7.43 и из того факта, что отображение $p \rightarrow p\mu$ является непрерывным (лемма 7.12), следует, что функция $\theta_f: P(XY) \rightarrow R^*$, определенная формулой $\theta_f(p) = \int f(x, y) dp$, является полуаналитической снизу. Ясно, что

$$\lambda(x) = \theta_f[q(dy|x)p_x].$$

Так как отображение $x \rightarrow q(dy|x)$ из X в $P(Y)$ измеримо по Борелю, а отображения $x \rightarrow p_x$ и $[q(dy|x), p_x] \rightarrow q(dy|x)p_x$ из X в $P(X)$ и из $P(X)P(Y)$ в $P(XY)$ непрерывны (следствие 7.21.1 и лемма 7.12), то из леммы 7.30 (3) следует, что λ является полуаналитической снизу функцией.

Предположим теперь, что $f \leq 0$. Положим $f_n(x, y) = \max\{-n, f(x, y)\}$. Тогда каждая функция f_n полуаналитическая снизу и $f_n \downarrow f$. Множества $E_n = \{(x, y, b) \in XYR \mid f_n(x, y) \leq b \leq 0\}$ являются аналитическими и

$$(p\mu)(E_n) = \int_{XY} \int_R \chi_{E_n} d\mu dp = - \int_{XY} f_n(x, y) dp.$$

Для любого числа $c \in R$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \{p \in P(XY) \mid \int f(x, y) dp < c\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p \in P(XY) \mid \int_{XY} f_n(x, y) dp < c\} = \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{p \in P(XY) \mid (p\mu)(E_n) > -c\}. \end{aligned}$$

Продлав затем те же рассуждения, что и в случае $f \geq 0$, получим, что λ — полуаналитическая снизу функция.

В общем случае

$$\int f(x, y) q(dy|x) = \int f^+(x, y) q(dy|x) - \int f^-(x, y) q(dy|x).$$

Функции f^+ и f^- являются полуаналитическими снизу, значит, по доказанному, каждое из слагаемых в правой части является полуаналитической снизу функцией. Требуемый результат следует из леммы 7.30 (4). $\square$

Следствие 7.48.1. Пусть X — борелевское пространство, и пусть $f: X \rightarrow R^*$ — полуаналитическая снизу функция. Тогда функция $\theta_f: P(X) \rightarrow R^*$, определенная формулой

$$\theta_f(p) = \int f dp,$$

является полуаналитической снизу.

Доказательство. Определим измеримое по Борелю стохастическое ядро на X при условии $P(X)$ формулой $q(dx|p) = p(dx)$. Применяя предложение 7.48, приходим к нужному результату. $\square$

Чтобы облегчить доказательство теоремы о выборе для полуаналитических снизу функций, приведем сначала результат о выборе из аналитического подмножества в произведении борелевских пространств. Читатель заметит явное сходство между этим результатом и леммой 7.21, которая использовалась при доказательстве теоремы о выборе для полунепрерывных сверху функций.

Предложение 7.49 (теорема Янкова—фон Неймана). Пусть X и Y — борелевские пространства и A — аналитическое множество в XY . Существует аналитически измеримая функция $\varphi: \text{proj}_X(A) \rightarrow Y$ такая, что $\text{Gr}(\varphi) \subset A$.

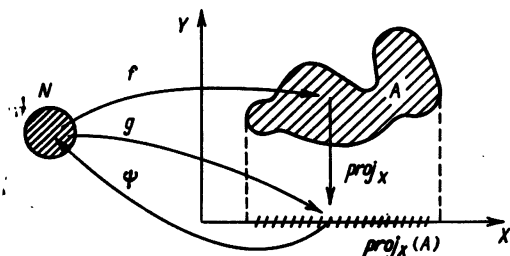


Рис. 2

Доказательство. (рис. 7.2). Пусть $f: N \rightarrow XY$ — непрерывное отображение, такое, что $A = f(N)$. Пусть $g = \text{proj}_X \circ f$. Тогда $g: N \rightarrow \text{proj}_X(A)$ является непрерывным отображением N на $\text{proj}_X(A)$. Для $x \in \text{proj}_X(A)$, $g^{-1}(\{x\})$ есть непустое замкнутое множество в N . Пусть $\xi_1(x)$ — наименьшее целое число, являющееся первой компонентой какого-либо из элементов $z_1 \in g^{-1}(\{x\})$. Пусть $\xi_2(x)$ — наименьшее целое число, являющееся второй компонентой какого-либо элемента $z_2 \in g^{-1}(\{x\})$, первой компонентой которого является $\xi_1(x)$. Вообще, пусть $\xi_k(x)$ — наименьшее целое число, являющееся k -й компонентой некоторого элемента $z_k \in g^{-1}(\{x\})$, первые $k-1$ компонент которого равны $\xi_1(x), \dots, \xi_{k-1}(x)$. Положим $\psi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots)$. Так как $z_k \rightarrow \psi(x)$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$\psi(x) \in g^{-1}(\{x\}). \quad (104)$$

Определим функцию $\varphi: \text{proj}_X(A) \rightarrow Y$ как $\varphi = \text{proj}_Y \circ \psi$, тогда $\text{Gr}(\varphi) \subset A$.

Покажем, что φ является аналитически измеримой функцией. Как и при доказательстве предложения 7.42 для любой конечной последовательности $(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \Sigma$, положим

$$N(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \mid \xi_1 = \sigma_1, \dots, \xi_k = \sigma_k\},$$

$$M(\sigma_1, \dots, \sigma_k) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \mid \xi_1 \leq \sigma_1, \dots, \xi_k \leq \sigma_k\}.$$

Покажем сначала, что функция ψ аналитически измерима, т.е. что $\psi^{-1}(B_N) \subset A_X$. Так как семейство $\{N(s) \mid s \in \Sigma\}$ является базой топологии в N , то в силу замечания вслед за определением 7.6 имеем, что $\sigma(\{N(s) \mid s \in \Sigma\}) = B_X$. Тогда

$$\psi^{-1}(B_N) = \psi^{-1}(\sigma(\{N(s) \mid s \in \Sigma\})) = \sigma(\psi^{-1}(\{N(s) \mid s \in \Sigma\})),$$

и этого достаточно, чтобы получить

$$\psi^{-1}[N(s)] \in A_X \quad \forall s \in \Sigma. \quad (105)$$

Мы утверждаем, что для любого $s = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in \Sigma$ выполняется соотношение

$$\psi^{-1}[N(s)] = g[M(s)] - \bigcup_{j=1}^k g[M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1)], \quad (106)$$

где $M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1) = \emptyset$, если $\sigma_j - 1 = 0$. Мы покажем это, проверив, что $\psi^{-1}[N(s)]$ является подмножеством множества в правой части формулы (106), и наоборот.

Предположим, что $x \in \psi^{-1}[M(s)]$. Пусть $\psi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots)$. Тогда

$$\psi(x) \in N(s) \subset M(s), \quad (107)$$

поэтому из соотношения (104) следует, что

$$x = g[\psi(x)] \in g[M(s)]. \quad (108)$$

Из соотношения (107) также вытекает, что $\xi_1(x) = \sigma_1, \dots, \xi_k(x) = \sigma_k$. По построению функции ψ число σ_1 является наименьшим целым числом, служащим первой компонентой какого-либо элемента из $g^{-1}(\{x\})$, а при $j = 2, \dots, k$ число σ_j — наименьшее целое число, служащее j -й компонентой какого-либо элемента из $g^{-1}(\{x\})$ с первыми $(j-1)$ компонентами, равными $\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}$. Другими словами,

$$g^{-1}(\{x\}) \cap M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1) = \emptyset, \quad j = 1, \dots, k.$$

Отсюда следует, что

$$x \notin \bigcup_{j=1}^k g[M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1)]. \quad (109)$$

Соотношения (108) и (109) влекут за собой включение

$$\psi^{-1}[N(s)] \subset g[M(s)] - \bigcup_{j=1}^k g[M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1)]. \quad (110)$$

Чтобы доказать обратное включение множеств, предположим, что

$$x \in g[M(s)] - \bigcup_{j=1}^k g[M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1)]. \quad (111)$$

Так как $x \in g[M(s)]$, то должен существовать такой элемент $y = (\eta_1, \eta_2, \dots) \in g^{-1}(x)$, что

$$\eta_1 \leq \sigma_1, \dots, \eta_k \leq \sigma_k. \quad (112)$$

Ясно, что $x \in \text{proj}_X(A) = g(N)$, поэтому функция $\psi(x)$ определена. Пусть $\psi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots)$. Согласно (104), имеем $g[\psi(x)] = x$, поэтому из предположения (111) вытекает, что

$$\psi(x) \notin M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1), \quad j = 2, \dots, k.$$

Так как $\psi(x) \notin M(\sigma_1 - 1)$, то мы знаем, что $\xi_1(x) \geq \sigma_1$. Но $\xi_1(x)$ является наименьшим целым числом, которое служит первой компонентой элемента, принадлежащего $g^{-1}(\{x\})$, поэтому из неравенства (112) выводится, что $\xi_1(x) \leq \eta_1 \leq \sigma_1$. Следовательно, $\xi_1(x) = \sigma_1$. Аналогично, так как $\psi(x) \notin M(\xi_1(x), \sigma_2 - 1)$, то $\xi_2(x) \geq \sigma_2$. Опять из неравенства (112) видно, что $\xi_2(x) \leq \eta_2 \leq \sigma_2$, поэтому $\xi_2(x) = \sigma_2$. Продолжая таким же образом, можно показать, что $\psi(x) \in N(s)$, т.е. $x \in \psi^{-1}[N(s)]$ и

$$\psi^{-1}[N(s)] \supset g[M(s)] - \bigcup_{j=1}^k g[M(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1}, \sigma_j - 1)]. \quad (113)$$

Из (110) и (113) следует равенство (106).

Заметим теперь, что $M(t)$ является открытым в N множеством при любом $t \in \Sigma$, поэтому $g[M(t)]$ — аналитическое множество в силу предложения 7.40. Соотношение (105) следует теперь из (106), так что ψ — аналитически измеримая функция.

Из определения функции φ и борелевской измеримости функций f и proj_Y получаем, что

$$\varphi^{-1}(B_Y) = \psi^{-1}(f^{-1}(\text{proj}_Y^{-1}(B_Y))) \subset \psi^{-1}(f^{-1}(B_{XY})) \subset \psi^{-1}(B_N).$$

Мы только что доказали, что $\psi^{-1}(B_N) \subset A_X$, и отсюда следует, что функция φ аналитически измерима. $\square$

Это дает возможность сформулировать теорему о выборе для полуаналитических снизу функций.

Предложение 7.50. Пусть X и Y — борелевские пространства, $D \subset XY$ — аналитическое множество и $f: D \rightarrow R^*$ полуаналитическая снизу функция. Определим функцию $f^*: \text{proj}_X(D) \rightarrow R^*$ формулой

$$f^*(x) = \inf_{y \in D_x} f(x, y). \quad (114)$$

(а) Для любого $\epsilon > 0$ существует аналитически измеримая функция $\varphi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такая, что $\text{Gr}(\varphi) \subset D$ и для всех $x \in \text{proj}_X(D)$ выполняется неравенство

$$f[x, \varphi(x)] = \begin{cases} f^*(x) + \epsilon, & \text{если } f^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } f^*(x) = -\infty; \end{cases}$$

(б) множество

$$I = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid \text{для некоторого } y_x \in D_x, f(x, y_x) = f^*(x)\}$$

универсально измеримо, и для любого $\epsilon > 0$ существует универсально измеримая функция $\varphi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такая, что $\text{Gr}(\varphi) \subset D$ и для всех $x \in \text{proj}_X(D)$ выполняются соотношения

$$f[x, \varphi(x)] = f^*(x), \text{ если } x \in I, \quad (115)$$

$$f[x, \varphi(x)] \leq \begin{cases} f^*(x) + \epsilon, & \text{если } x \notin I, f^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } x \notin I, f^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (116)$$

Доказательство.

(а) (ср. доказательство предложения 7.34 и рис. 7.1). Функция f^* полуаналитическая снизу, согласно предложению 7.47. Для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ положим

$$A(k) = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) < k\epsilon\},$$

$$B(k) = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid (k-1)\epsilon \leq f^*(x) < k\epsilon\},$$

$$B(-\infty) = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid f^*(x) = -\infty\},$$

$$B(\infty) = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid f^*(x) = \infty\}.$$

Множества $A(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $B(-\infty)$ аналитические, в то время как множества $B(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $B(\infty)$ аналитически измеримы. По теореме Янкова — фон Неймана (предложение 7.49) для каждого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ существуют аналитически измеримые функции $\varphi_k: \text{proj}_X[A(k)] \rightarrow Y$ такие, что $(x, \varphi_k(x)) \in A(k)$ для всех $x \in \text{proj}_X[A(k)]$, и аналитически измеримая функция $\bar{\varphi}: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такая, что $(x, \bar{\varphi}(x)) \in D$ для всех $x \in \text{proj}_X(D)$. Пусть k^* — целое число такое, что $k^* \leq -1/\epsilon^2$. Опре-

делим функцию $\varphi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & \text{если } x \in B(k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \bar{\varphi}(x), & \text{если } x \in B(\infty), \\ \varphi_{k^*}(x), & \text{если } x \in B(-\infty). \end{cases}$$

Так как $B(k) \subset \text{proj}_X[A(k)]$ и $B(-\infty) \subset \text{proj}_X[A(k)]$ при всех k , такое определение возможно. Ясно, что φ — аналитически измеримая функция, $\text{Gr}(\varphi) \subset D$. Если $x \in B(k)$, то $(x, \varphi_k(x)) \in A(k)$ и

$$f[x, \varphi(x)] = f[x, \varphi_k(x)] < k\epsilon \leq f^*(x) + \epsilon.$$

Если $x \in B(\infty)$, то $f(x, y) = \infty$ при всех $y \in D_x$ и $f[x, \varphi(x)] = \infty = f^*(x)$. Если $x \in B(-\infty)$, то

$$f[x, \varphi(x)] = f[x, \varphi_{k^*}(x)] < k^*\epsilon \leq -1/\epsilon.$$

Следовательно, функция φ обладает всеми требуемыми свойствами.

(б) Рассмотрим множество $E \subset XYR^*$, определенное соотношением

$$E = \{(x, y, b) \mid (x, y) \in D, f(x, y) \leq b\}.$$

Так как

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{r \in Q^+} \{(x, y, b) \mid (x, y) \in D, f(x, y) \leq r, r \leq b + (1/k)\},$$

то из следствия 7.35.2 и предложения 7.38 следует, что E — аналитическое множество в XYR^* , и, следовательно, множество $A = \text{proj}_{XR^*}(E)$ аналитическое в XR^* . Отображение $T: \text{proj}_X(D) \rightarrow XR^*$, определенное соотношением $T(x) = (x, f^*(x))$, аналитически измеримо, и

$$I = \{x \mid (x, f^*(x)) \in A\} = T^{-1}(A).$$

По следствию 7.44.2 множество I универсально измеримо.

Так как E — аналитическое множество, то по теореме Янкова — фон Неймана существует аналитически измеримое отображение $\rho: A \rightarrow Y$ такое, что $(x, \rho(x, b), b) \in E$ для всех $(x, b) \in A$. Определим функцию $\psi: I \rightarrow Y$ соотношением

$$\psi(x) = \rho(x, f^*(x)) = (\rho \circ T)(x) \quad \forall x \in I.$$

В силу следствия 7.44.2 функция ψ — универсально измерима, и по построению $f[x, \psi(x)] \leq f^*(x)$ для $x \in I$. Следовательно,

$$f[x, \psi(x)] = f^*(x) \quad \forall x \in I. \quad (117)$$

Согласно части (а), существует аналитически измеримая функция $\psi_\epsilon: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такая, что

$$f[x, \psi_\epsilon(x)] \leq \begin{cases} f^*(x) + \epsilon, & \text{если } f^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } f^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (118)$$

Определим функцию $\varphi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ соотношением

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } x \in I, \\ \psi_\epsilon(x), & \text{если } x \in \text{proj}_X(D) - I. \end{cases}$$

Тогда φ — универсально измеримая функция, которая, согласно (117) и (118), обладает всеми требуемыми свойствами. $\square$

Так как суперпозиция аналитически измеримых функций может не быть аналитически измеримой (приложение Б), то селектор, полученный при доказательстве предложения 7.50 (б), может не быть аналитически измеримым. Суперпозиция универсально измеримых функций универсально измерима, и поэтому полученный селектор универсально измерим. Однако существует σ -алгебра, называемая *предельной σ -алгеброй* и лежащая между A_X и U_X , такая, что суперпозиция предельно измеримых функций снова предельно измерима. Эта σ -алгебра исследуется в приложении Б, а усиленный вариант предложения 7.50 устанавливается в разделе 11.1.

Глава 8

БОРЕЛЕВСКАЯ МОДЕЛЬ С КОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

В главах 8–10 будет изучаться модель, очень похожая на ту, что представлена в п. 2.3.2. С точки зрения приложений эта модель рассмотрена в монографии Бертсекаса "Динамическое программирование и стохастическое управление" [12], на которую мы будем постоянно ссылаться. В модели из п. 2.3.2 или из книги [12] имеется счетное пространство возмущений и произвольные пространства состояний и управлений, в то время как в рассматриваемой здесь модели пространства состояний, управлений и возмущений будут борелевскими.

8.1. Модель

Определение 8.1. *Модель стохастического оптимального управления с конечным горизонтом задается девятью элементами $(S, C, U, W, p, f, \alpha, g, N)$, которые мы сейчас опишем. Буквы x и u используются для обозначения элементов множеств S и C соответственно.*

S — пространство состояний. Непустое борелевское пространство.

C — пространство управлений. Непустое борелевское пространство.

U — ограничения на управление. Функция на множестве S со значениями в классе непустых подмножеств из C . Предполагается, что множество

$$\Gamma = \{(x, u) \mid x \in S, u \in U(x)\} \quad (1)$$

является аналитическим в SC .

W — пространство возмущений. Непустое борелевское пространство.

$p(dw \mid x, u)$ — ядро возмущений. Измеримое по Борелю стохастическое ядро на W при условии SC .

f — функция системы. Измеримая по Борелю функция на SCW со значениями в S .

α — коэффициент дисконтирования. Положительное действительное число.

g — функция издержек за один шаг. Полуаналитическая снизу функция на Γ со значениями в R^* .

N — горизонт. Положительное целое число.

Мы наблюдаем систему, переходящую из состояния x_k в состояние x_{k+1} , согласно уравнению системы

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-2,$$

причем издержки на каждом шаге равны $g(x_k, u_k)$. Возмущения w_k являются случайными объектами с распределениями вероятностей $p(dw_k \mid x_k,$

u_k). Наша цель состоит в том, чтобы выбирать управления u_k в зависимости от истории $(x_0, u_0, \dots, x_{k-1}, u_{k-1}, x_k)$ так, чтобы минимизировать выражение

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g(x_k, u_k) \right\}. \quad (2)$$

Смысл этого выражения будет раскрыт несколько позднее. Ограничения состоят в том, что если k -м состоянием является x_k , то k -е управление должно выбираться из множества $U(x_k)$.

В моделях из п. 2.3.2 и [12] функция издержек за один шаг g зависит также от возмущения, т. е. имеет вид $g(x, u, w)$. Этот вариант сводится к рассматриваемому заменой функции $g(x, u, w)$ на функцию

$$\bar{g}(x, u) = \int g(x, u, w) p(dw | x, u).$$

Если функция $g(x, u, w)$ полуаналитическая снизу, то таковой будет и функция $\bar{g}(x, u)$ (предложение 7.48). Если распределение $p(dw | x, u)$ непрерывно, а функция $g(x, u, w)$ полунепрерывна снизу и ограничена снизу или полунепрерывна сверху и ограничена сверху, то функция $\bar{g}(x, u)$ будет соответственно полунепрерывна снизу и ограничена снизу или полунепрерывна сверху и ограничена сверху (предложение 7.31). Так как мы имеем дело только с этими тремя случаями, то, без потери общности, можем считать, что функция издержек за один шаг не зависит от возмущений.

Модель представленная в определении 8.1, является стационарной, т. е. ее параметры не изменяются от шага к шагу. Вопрос о сведении нестационарной модели к стационарной рассматривается в разделе 10.1.

Для упрощения обозначений введем в рассмотрение *стохастическое ядро переходов* (в пространстве состояний) на S при условии SC , определяемое формулой*)

$$t(B | x, u) = p(\{w | f(x, u, w) \in B\} | x, u) = p(f^{-1}(B_{(x, u)}) | x, u). \quad (3)$$

Как видно из определения, $t(B | x, u)$ есть вероятность того, что $(k+1)$ -е состояние содержится в множестве B при условии, что k -е состояние равно x , а k -е управление равно u . Из предложения 7.26 и следствия 7.26.1 следует, что функция $t(dx' | x, u)$ измерима по Борелю.

Определение 8.2. Стратегией в модели из определения 8.1 называется последовательность $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$, в которой $\mu_k(du_k | x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ при каждом k является универсально измеримым стохастическим ядром на C при условии $SC \dots CS$, удовлетворяющим соотношению

$$\mu_k(U(x_k) | x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k) = 1$$

для любой истории $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$. Если при любом k мера μ_k зависит только от пары (x_0, x_k) , то стратегия π называется *полу-марковской*. Если мера μ_k зависит только от x_k , то стратегия π называется *марковской*. Если для любого k и любой истории $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ мера $\mu_k(du_k | x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ приписывает единичную массу некоторой точке из пространства C , то стратегия π называется *нерандомизированной*. В этом случае, несколько нарушив обозначения, стратегию

*) Введенный здесь объект другие авторы называют *переходной функцией рассматриваемой модели*. (Прим. ред.)

π можно рассматривать как последовательность универсально измеримых (следствие 7.44.4.3) отображений $\mu_k : SC \dots CS \rightarrow C$ таких, что

$$\mu_k(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k) \in U(x_k)$$

для любой истории $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$. Если F есть некоторый тип σ -алгебр в борелевских пространствах и все компоненты стохастического ядра стратегии F -измеримы, мы скажем, что стратегия F -измерима. (Например, F может представлять собой борелевские σ -алгебры или аналитические σ -алгебры.)

Обозначим через Π' множество всех стратегий для моделей в определении 8.2 а через Π — множество всех марковских стратегий. Будет показано, что во многих случаях, для того чтобы найти "наилучшую" из допущенных стратегий, не нужно выходить за пределы множества Π . В большинстве случаев "наилучшая" стратегия может быть выбрана в классе нерандомизированных стратегий. Так как множество Γ аналитическое, то теорема Янкова — фон Неймана (предложение 7.49) гарантирует, что существует по крайней мере одна нерандомизированная марковская стратегия, поэтому множества Π и Π' не пусты.

Нерандомизированная марковская стратегия $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ представляет собой вариант стратегии в смысле раздела 2.1 для конечного горизонта. Понятие стратегии, данное в определении 8.2, шире аналогичного понятия из раздела 2.1, за счет того, что допускаются нерандомизированные немарковские стратегии. Однако оно одновременно и уже из-за того, что требуется универсальная измеримость.

Теперь мы в состоянии дать точное толкование выражению (2). Здесь и в дальнейшем мы часто для ясности нумеруем пространства состояний и управлений. Однако, за исключением главы 10, в которой рассматривается нестационарная модель, мы всегда будем понимать под S_k само пространство S , а под C_k само пространство C . Предположим, что $p \in P(S)$, а $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ — стратегия из определения 8.1. Согласно предложению 7.45, существует единственная вероятностная мера $r_N(\pi, p)$ на множестве $S_0 C_0 \dots S_{N-1} C_{N-1}$ такая, что для любой универсально измеримой функции $h : S_0 C_0 \dots S_{N-1} C_{N-1} \rightarrow R^*$, удовлетворяющей одному из неравенств $\int h^+ dr_N(\pi, p) < \infty$ или $\int h^- dr_N(\pi, p) < \infty$,

$$\int h dr_N(\pi, p) = \int_{S_0} \int_{C_0} \int_{S_1} \dots \int_{S_{N-1}} \int_{C_{N-1}} h(x_0, u_0, \dots,$$

$$x_{N-1}, u_{N-1}) \mu_{N-1}(du_{N-1} | x_0, u_0, \dots, u_{N-2}, x_{N-1}) \times$$

$$\times t(dx_{N-1} | x_{N-2}, u_{N-2}) \dots t(dx_1 | x_0, u_0) \mu_0(du_0 | x_0) p(dx_0), \quad (4)$$

где $t(dx' | x, u)$ представляет собой измеримое по Борелю стохастическое ядро, определенное формулой (3). Далее, из соотношения (4) следует, что $\int h dr_N(\pi, p_x)$ есть универсально измеримая функция от x (предложение 7.46), и если функция h и стратегия π измеримы по Борелю, то $\int h dr_N(\pi, p_x)$ является борелевской функцией (предложение 7.29).

Определение 8.3. Пусть $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ — стратегия для модели в определении 8.1. Для любого $K \leq N$ издержками за K шагов при стратегии π в состоянии $x \in S$ называется величина

$$J_{K, \pi}(x) = \int \left[\sum_{k=0}^{K-1} \alpha^k g(x_k, u_k) \right] dr_N(\pi, p_x), \quad (5)$$

где для любой стратегии $\pi \in \Pi'$ и любого $p \in P(S)$, $r_N(\pi, p)$ представ-

ляет собой единственную вероятностную меру, удовлетворяющую соотношению (4). Оптимальные издержки за K шагов в точке x равны

$$J_K^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{K, \pi}(x). \quad (6)$$

Для любого $\epsilon > 0$ стратегия π называется ϵ -оптимальной при горизонте K , если

$$J_{K, \pi}(x) \leq \begin{cases} J_K^*(x) + \epsilon & \text{при } J_K^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon & \text{при } J_K^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

Если $J_{K, \pi}(x) = J_K^*(x)$, то стратегия π оптимальна при горизонте K в точке x . Если стратегия π ϵ -оптимальна при горизонте K или оптимальна при горизонте K в любой точке $x \in S$, то говорят, что она соответственно ϵ -оптимальна при горизонте K или оптимальна при горизонте K . Для последовательности $\{\epsilon_n\}$ положительных чисел с $\epsilon_n \downarrow 0$ говорим, что последовательность стратегий $\{\pi_n\}$ обладает $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности при горизонте K , если $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{K, \pi_n} = J_K^*$ и для $n = 2, 3, \dots$ выполняются неравенства

$$J_{K, \pi_n}(x) \leq \begin{cases} J_K^*(x) + \epsilon_n, & \text{если } J_K^*(x) > -\infty, \\ J_{K, \pi_{n-1}} + \epsilon_n, & \text{если } J_K^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

Если $K = N$, то слова "при горизонте K " в приведенных выше определениях будем опускать.

Заметим, что величина J_K^* не зависит от горизонта N , пока $K \leq N$. Отметим также, что функция $J_{K, \pi}(x)$ универсально измерима по x . Если π — измеримая по Борелю стратегия, и функция g борелевская, то функция $J_{K, \pi}(x)$ тоже борелевская по x .

Для любых стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi'$ и меры $p \in P(S)$ обозначим через $q_k(\pi, p)$ проекцию распределения $r_N(\pi, p)$ на $S_k C_k$. Если в соотношении (4) взять $h = \chi_{S_0 \dots C_{k-1} \underline{S}_k \underline{C}_k S_{k+1} \dots C_{N-1}}$, то получим, что

$$\begin{aligned} q_k(\pi, p)(\underline{S}_k \underline{C}_k) &= \int_{S_0} \int_{C_0} \int_{S_1} \dots \int_{C_{k-1}} \int_{\underline{S}_k} \mu_k(\underline{C}_k | x_0, u_0, \dots, \\ &u_{k-1}, x_k) t(dx_k | x_{k-1}, u_{k-1}) \mu_{k-1}(du_{k-1} | x_0, u_0, \dots, \\ &u_{k-2}, x_{k-1}) \dots t(dx_1 | x_0, u_0) \mu_0(du_0 | x_0) p(dx_0) = \\ &= \int_{S_0 C_0 \dots S_{k-1} C_{k-1}} \int_{\underline{S}_k} \mu_k(\underline{C}_k | x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k) \times \\ &\times t(dx_k | x_{k-1}, u_{k-1}) dr_{k-1}(\pi, p) \quad \forall \underline{S}_k \in B_S, \underline{C}_k \in B_C. \end{aligned} \quad (7)$$

Из соотношений (1) и (7) видно, что $q_k(\pi, p)(\Gamma) = 1$. Если стратегия π является марковской, то соотношение (7) приобретает вид

$$\begin{aligned} q_k(\pi, p)(\underline{S}_k \underline{C}_k) &= \int_{S_{k-1} C_{k-1}} \int_{\underline{S}_k} \mu_k(\underline{C}_k | x_k) \times \\ &\times t(dx_k | x_{k-1}, u_{k-1}) dq_{k-1}(\pi, p) \quad \forall \underline{S}_k \in B_S, \underline{C}_k \in B_C. \end{aligned} \quad (8)$$

Если справедливо одно из неравенств

$$\int_{S_k C_k} g dq_k(\pi, p_x) < \infty \quad \forall \pi \in \Pi', \quad x \in S, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (F^*)$$

или

$$\int_{S_k C_k} g^* dq_k(\pi, p_x) < \infty \quad \forall \pi \in \Pi', \quad x \in S, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (F^*)$$

то из леммы 7.11(б) следует, что для любых стратегии $\pi \in \Pi'$ и состояний $x \in S$ имеет место равенство

$$J_{K, \pi}(x) = \sum_{k=1}^{K-1} \alpha^k \int_{S_k C_k} g dq_k(\pi, p_x), \quad K = 1, \dots, N. \quad (9)$$

В дальнейшем, если перед формулировкой какого-либо предложения появляется символ (F^*) (соответственно (F^-)), то условие (F^*) (соответственно (F^-)) понимается как часть предположений этого предложения. Если появляются оба символа (F^*) и (F^-) , то предложение справедливо, если в предположения включено одно из этих условий (F^*) или (F^-) .

Для данной стратегии $\pi' \in \Pi'$ может не существовать марковской стратегии, которая была бы не хуже чем π' при каждом $x \in S$, т.е. такой стратегии $\pi \in \Pi$, для которой выполнялось бы неравенство

$$J_{N, \pi}(x) \leq J_{N, \pi'}(x) \quad (10)$$

для любого $x \in S$. Однако если состояние x фиксировано, то можно найти марковскую стратегию π , удовлетворяющую неравенству (10);

Предложение 8.1. $(F^*)(F^-)$ Для любых $x \in S$ и $\pi' \in \Pi'$ существует марковская стратегия π такая, что

$$J_{K, \pi}(x) = J_{K, \pi'}(x), \quad K = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть заданы стратегия $\pi' = (\mu'_0, \mu'_1, \dots, \mu'_{N-1})$ и состояние $x \in S$. Пусть $(\mu_k (du_k | x_k) (k = 0, 1, \dots, N-1))$ — измеримые по Борелю стохастические ядра, получаемые декомпозицией распределения $q_k(\pi', p_x)$ (следствие 7.27.2), т.е.

$$q_k(\pi', p_x)(\underline{S}_k \underline{C}_k) = \int_{\underline{S}_k} \mu_k(\underline{C}_k | x_k) p_k(\pi', p_x)(dx_k)$$

$$\forall \underline{S}_k \in \mathcal{B}_S, \quad \underline{C}_k \in \mathcal{B}_C, \quad (12)$$

где $p_k(\pi', p_x)$ есть проекция $q_k(\pi', p_x)$ на S_k . Из соотношения (12) следует, что

$$1 = q_k(\pi', p_x)(\Gamma) = \int_{S_k} \mu_k(U(x_k) | x_k) p_k(\pi', p_x)(dx_k),$$

поэтому необходимо, чтобы равенство $\mu_k(U(x_k) | x_k) = 1$ выполнялось для почти всех по мере $p_k(\pi', p_x)$ точек x_k . Изменив в случае необходимости $\mu_k(\cdot | x_k)$ на множество меры нуль по мере $p_k(\pi', p_x)$, мы можем считать, что соотношение (12) выполнимо, так что $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ является стратегией в смысле определения 8.2. Соотношение (11) будет следовать из (9), если показать, что $q_k(\pi', p_x) = q_k(\pi, p_x)$ для всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Для доказательства последнего достаточно показать, что равенство

$$q_k(\pi', p_x)(\underline{S}_k \underline{C}_k) = q_k(\pi, p_x)(\underline{S}_k \underline{C}_k) \quad \forall \underline{S}_k \in \mathcal{B}_S, \quad \underline{C}_k \in \mathcal{B}_C, \quad (13)$$

выполняется для всех $k = 0, 1, \dots, N-1$. Докажем (13) по индукции. При $k = 0$, $\underline{S}_0 \in \mathcal{B}_S$ и $\underline{C}_0 \in \mathcal{B}_C$ из соотношения (12) получим, что

$$q_0(\pi', p_x)(\underline{S}_0 \underline{C}_0) = \int_{\underline{S}_0} \mu_0(\underline{C}_0 | x_0) p_x(dx_0) = q_0(\pi, p_x)(\underline{S}_0 \underline{C}_0).$$

Если $q_k(\pi', p_x) = q_k(\pi, p_x)$ для $\underline{S}_{k+1} \in B_S, \underline{C}_{k+1} \in B_C$, то из соотношения (12) следует, что

$$q_{k+1}(\pi', p_x)(\underline{S}_{k+1} \underline{C}_{k+1}) = \int_{\underline{S}_{k+1}} \mu_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | x_{k+1}) p_{k+1}(\pi', p_x)(dx_{k+1}). \quad (14)$$

Из соотношения (7) видно, что

$$p_{k+1}(\pi', p_x)(\underline{S}_{k+1}) = \int_{S_k C_k} t(\underline{S}_{k+1} | x_k, u_k) dq_k(\pi', p_x),$$

поэтому, если $h: S_{k+1} \rightarrow [0, \infty]$ является измеримой по Борелю функцией, принимающей значение 0 и 1, то

$$\begin{aligned} \int_{S_{k+1}} h(x_{k+1}) dp_{k+1}(\pi', p_x)(dx_{k+1}) &= \\ &= \int_{S_k C_k} \int_{S_{k+1}} h(x_{k+1}) t(dx_{k+1} | x_k, u_k) dq_k(\pi', p_x). \end{aligned} \quad (15)$$

Значит, равенство (15) справедливо для измеримых по Борелю простых функций и, следовательно, для всех борелевских функций $h: S_{k+1} \rightarrow [0, \infty]$. Взяв в равенстве (15) в качестве $h(x_{k+1})$ функцию $\mu_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | x_{k+1})$, из равенства (14), предположения индукции и равенства (8) получим

$$\begin{aligned} q_{k+1}(\pi', p_x)(\underline{S}_{k+1} \underline{C}_{k+1}) &= \\ &= \int_{S_k C_k} \int_{\underline{S}_{k+1}} \mu_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | x_{k+1}) t(dx_{k+1} | x_k, u_k) dq_k(\pi', p_x) = \\ &= \int_{S_k C_k} \int_{\underline{S}_{k+1}} \mu_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | x_{k+1}) t(dx_{k+1} | x_k, u_k) dq_k(\pi, p_x) = \\ &= q_{k+1}(\pi, p_x)(\underline{S}_{k+1} \underline{C}_{k+1}), \end{aligned}$$

что доказывает справедливость равенства (13) для значения $k+1$. $\square$

Следствие 8.1.1 (F^+)(F^-) При любом $K = 1, 2, \dots, N$ имеем:

$$J_K^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{K, \pi}(x) \quad \forall x \in S,$$

где Π — множество всех марковских стратегий.

Следствие 8.1.1 показывает, что допущение немарковских стратегий не приводит к уменьшению оптимальной функции издержек. Однако в классе немарковских стратегий может быть гарантировано существование ϵ -оптимальной нерандомизированной стратегии (предложение 8.3), в то время как в классе марковских стратегий ее может не существовать (пример 2).

8.2. Алгоритм динамического программирования — существование оптимальных и ϵ -оптимальных стратегий

Пусть $U(C|S)$ обозначает множество универсально измеримых стохастических ядер μ на множестве C при условии S , удовлетворяющих равенству $\mu(U(x)|x) = 1$ при любом $x \in S$. Таким образом, множество марковских стратегий представляется в виде $\Pi = U(C|S)U(C|S) \cdots U(C|S)$, где присутствуют N составляющих.

Определение 8.4. Пусть функция $J: S \rightarrow R^*$ универсально измерима, и $\mu \in U(C|S)$. Оператор T_μ , отображающий J в $T_\mu(J): S \rightarrow R^*$, определяется формулой

$$T_\mu(J)(x) = \int_C [g(x, u) + \alpha \int_S J(x') t(dx' | x, u)] \mu(du | x),$$

где x — любая точка из S .

В терминах функции системы f и ядра возмущений $p(dw|x, u)$ оператор T_μ может быть выражен следующим образом (ср. с (3)):

$$T_\mu(J)(x) = \int_C [g(x, u) + \\ + \alpha \int_W J[f(x, u, w)] p(dw|x, u)] \mu(du|x).$$

В силу предложения 7.46 функция $T_\mu(J)$ универсально измерима. Покажем, что при условиях (F^+) или (F^-) издержки, соответствующие стратегии $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$, могут быть определены в терминах суперпозиции операторов $T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{N-1}}$.

Лемма 8.1. $(F^+)(F^-)$ Пусть $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1})$ — марковская стратегия, и пусть функция $J_0: S \rightarrow R^*$ тождественно равна нулю. Тогда для $K = 1, 2, \dots, N$ имеем

$$J_{K, \pi} = (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0), \quad (16)$$

где $T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}}$ обозначает суперпозицию операторов $T_{\mu_0}, \dots, T_{\mu_{K-1}}$.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Для любого $x \in S$ справедливы равенства

$$J_{1, \pi}(x) = \int g dq_0(\pi, p_x) = \int_C g(x, u_0) \mu_0(du_0|x) = T_{\mu_0}(J_0)(x).$$

Предположим, что лемма верна для значения $K-1$. Пусть $\bar{\pi} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-1}, \mu)$, где μ — некоторый элемент множества $U(C|S)$. Тогда для любого из условий (F^+) или (F^-) и леммы 7.11 (б) следует, что соотношение (5) можно переписать в виде

$$J_{K, \pi}(x) = \int_{C_0} g(x, u_0) \mu_0(du_0|x) + \alpha \int_{C_0} \int_{S_1} \int_{C_1} \dots \\ \dots \int_{C_{K-1}} \left[\sum_{k=1}^{K-1} \alpha^{k-1} g(x_k, u_k) \right] \mu_{K-1}(du_{K-1}|x_{K-1}) \times \\ \times t(dx_{K-1}|x_{K-2}, u_{K-2}) \dots \mu_1(du_1|x_1) t(dx_1|x, u_0) \times \\ \times \mu_0(du_0|x) = \int_{C_0} g(x, u_0) \mu_0(du_0|x) + \\ + \alpha \int_{C_0} \int_{S_1} J_{K-1, \bar{\pi}}(x_1) t(dx_1|x, u_0) \mu_0(du_0|x) \quad \forall x \in S. \quad (17)$$

При условии (F^-) имеем

$$\int_{C_0} g^+(x, u_0) \mu_0(du_0|x) < \infty$$

и

$$\int_{C_0} \int_{S_1} [J_{K-1, \bar{\pi}}(x_1) t(dx_1|x, u_0)]^+ \mu_0(du_0|x) < \infty.$$

Аналогичные неравенства выполняются и при условии (F^+) , поэтому, применяя к правой части равенства (17) предположение индукции и лемму 7.11 (б), получим

$$J_{K, \pi}(x) = \int_{C_0} [g(x, u_0) + \alpha \int_{S_1} (T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0)(x_1) \times \\ \times t(dx_1|x, u_0)] \mu_0(du_0|x) = (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0)(x). \quad \square$$

Определение 8.5. Пусть функция $J: S \rightarrow R^*$ универсально измерима. Оператор T , отображающий J в $T(J): S \rightarrow R^*$, определяется формулой

$$T(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + \alpha \int_S J(x') t(dx'|x, u)\},$$

где x — любая точка из S .

Подобно оператору T_μ , оператор T может быть выражен через функцию f и ядро $p(dw|x, u)$ в виде

$$T(J)(x) = \inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + \alpha \int_W J[f(x, u, w)] p(dw|x, u)\}.$$

Когда меры μ сосредоточены в единственных точках, операторы T_μ и T из определений 8.4 и 8.5 представляют собой частные случаи операторов, определенных в разделе 2.1, если только нет ограничений измеримости на J и μ . В рассматриваемом в этой главе случае отображение H из раздела 2.1 представляется в виде

$$\begin{aligned} H(x, u, J) &= g(x, u) + \alpha \int_S J(x') t(dx'|x, u) = \\ &= g(x, u) + \alpha \int_W J[f(x, u, w)] p(dw|x, u). \end{aligned}$$

Сформулируем и докажем для этой функции H аналоги предположений F.1 и F.3 из раздела 3.1. Справедливость предположения F.2 очевидна. Далее, если $\mu \in U(C|S)$, функции $J_1, J_2: S \rightarrow R^*$ универсально измеримы и $J_1 \leq J_2$, то имеем $T_\mu(J_1) \leq T_\mu(J_2)$ и $T(J_1) \leq T(J_2)$. Если $r \in (0, \infty)$, то $T_\mu(J_1 + r) = T_\mu(J_1) + \alpha r$ и $T(J_1 + r) = T(J_1) + \alpha r$. Мы часто будем пользоваться этими свойствами. Однако у читателя не должно возникать иллюзий, будто модель этой главы является частным случаем модели глав 2 и 3. В более ранней модели не было ограничений на измеримость стратегий.

Согласно лемме 7.30 (4) и предложениям 7.47 и 7.48 функция $T(J)$ является полуаналитической снизу, если такой является функция J . Будем k -кратное произведение оператора T на себя обозначать через T^k , так что $T^k(J) = T[T^{k-1}(J)]$, где $T^0(J) = J$. В предложении 8.2 будет показано, что при выполнении одного из условий (F^+) или (F^-) оптимальные издержки могут быть выражены в терминах T^N . Нам потребуется три леммы.

Лемма 8.2. Пусть функция $J: S \rightarrow R^*$ полуаналитическая снизу. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует функция $\mu \in U(C|S)$ такая, что выполняется неравенство

$$T_\mu(J)(x) \leq T(J)(x) + \epsilon \quad \forall x \in S,$$

где величина $T(J)(x) + \epsilon$ может принимать значение $-\infty$.

Доказательство. Согласно предложению 7.50, существуют универсально измеримые селекторы $\mu_m: S \rightarrow C$ такие, что для $m = 1, 2, \dots$ и $x \in S$ мы имеем $\mu_m(x) \in U(x)$ и выполняются неравенства

$$T_{\mu_m}(J)(x) \leq \begin{cases} T(J)(x) + \epsilon, & \text{если } T(J)(x) > -\infty, \\ -2^m, & \text{если } T(J)(x) = -\infty. \end{cases}$$

Пусть мера $\mu(dw|x)$ приписывает единичную массу точке $\mu_1(x)$, когда $T(J)(x) > -\infty$, и массу, равную $1/2^m$, точке $\mu_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, когда $T(J)(x) = -\infty$.

Для любого множества $\underline{C} \in \mathcal{B}_C$ мера

$$\mu(\underline{C}|x) = \begin{cases} \chi_{\underline{C}}[\mu_1(x)], & \text{если } T(J)(x) > -\infty, \\ \sum_{m=1}^{\infty} (1/2^m) \chi_{\underline{C}}[\mu_m(x)], & \text{если } T(J)(x) = -\infty, \end{cases}$$

является универсально измеримой функцией x и, следовательно, μ представляет собой универсально измеримое стохастическое ядро (лемма 7.28 (а), (б)). Это ядро μ обладает всеми требуемыми свойствами. $\square$

Лемма 8.3. (F^+) Если функция $J_0: S \rightarrow R^*$ есть тождественный нуль, то $T^K(J_0)(x) > -\infty$ для любых $x \in S$ и $K = 1, \dots, N$, где T^K — кратное произведение оператора T на себя.

Доказательство. Предположим, что для некоторых $K \leq N$ и $\bar{x} \in S$ выполняются соотношения $T^j(J_0)(x) > -\infty, j = 0, \dots, K-1$, для любого $x \in S$ и $T^K(J_0)(\bar{x}) = -\infty$. В силу предложения 7.50 существуют универсально измеримые селекторы $\mu_j: S \rightarrow C, j = 1, \dots, K-1$, такие, что $\mu_j(x) \in U(x)$, и неравенства

$$(T_{\mu_{K-j}} T^{j-1})(J_0)(x) \leq T^j(J_0)(x) + 1, \quad j = 1, \dots, K-1,$$

выполняются для любого $x \in S$. Тогда

$$(T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0) \leq (T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{K-2}})[T(J_0) + 1] \leq$$

$$\leq (T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{K-3}})[T^2(J_0) + 1 + \alpha] \leq T^{K-1}(J_0) + 1 + \alpha + \dots + \alpha^{K-2},$$

где последнее неравенство получается повторением выкладок, используемых при выводе первых двух неравенств.

По лемме 8.2 существуют стохастическое ядро $\mu_0 \in U(C|S)$ такое, что

$$(T_{\mu_0} T^{K-1})(J_0)(\bar{x}) = -\infty.$$

Тогда

$$(T_{\mu_0} T_{\mu_1} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0)(\bar{x}) \leq$$

$$\leq T_{\mu_0} [T^{K-1}(J_0) + 1 + \alpha + \dots + \alpha^{K-2}](\bar{x}) = -\infty.$$

Возьмем произвольное $\mu \in U(C|S)$ и положим $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{K-1}, \mu, \dots, \mu)$ так, что $\pi \in \Pi$. По лемме 8.1

$$\sum_{k=0}^{K-1} \alpha^k \int g dq_k(\pi, p_{\bar{x}}) = J_{K, \pi}(\bar{x}) = (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0)(\bar{x}) = -\infty,$$

откуда следует, что $\int g^- dq_k(\pi, p_{\bar{x}}) = -\infty$ при некотором $k \leq K-1$. Это противоречит предположению индукции об условии (F^+) . $\square$

Лемма 8.4. Пусть $\{J_k\}$ — последовательность универсально измеримых действительных в расширенном смысле функций на множестве S , и пусть ядро μ является элементом множества $U(C|S)$.

(а) Если $T_{\mu}(J_1)(x) < \infty$ для любого $x \in S$ и $J_k \downarrow J$, то $T_{\mu}(J_k) \downarrow T_{\mu}(J)$.

(б) Если $T_{\mu}(J_1)(x) < \infty$ для любого $x \in S, g \geq 0$ и $J_k \uparrow J$, то $T_{\mu}(J_k) \uparrow T_{\mu}(J)$.

(в) Если последовательность $\{J_k\}$ равномерно ограничена, функция g ограничена и $J_k \rightarrow J$, то $T_{\mu}(J_k) \rightarrow T_{\mu}(J)$.

Доказательство. Предположим сначала, что выполняются условия $T_\mu(J_1) < \infty$ и $J_k \downarrow J$. Зафиксируем точку x . Так как

$$\int [g(x, u) + \alpha f J_1(x') t(dx'|x, u)] \mu(du|x) < \infty,$$

то для почти всех по мере $\mu(du|x)$ значений u получим

$$g(x, u) + \alpha f J_1(x') t(dx'|x, u) < \infty.$$

Из теоремы о монотонном предельном переходе под знаком интеграла (лемма 7.11 (e)) следует, что

$$g(x, u) + \alpha f J_k(x') t(dx'|x, u) \downarrow g(x, u) + \alpha f J(x') t(dx'|x, u)$$

для почти всех по мере $\mu(du|x)$ значений u . Чтобы показать сходимость $T_\mu(J_k)(x) \downarrow T_\mu(J)(x)$, нужно еще раз применить теорему о монотонном предельном переходе под знаком интеграла.

Если выполнены условия $T_\mu(J_1^-) < \infty$, $g \geq 0$ и $J_k \uparrow J$, то применимы аналогичные рассуждения. Если последовательность $\{J_k\}$ равномерно ограничена, функция g ограничена и имеет место сходимость $J_k \rightarrow J$, то применимы аналогичные рассуждения, использующие теорему об ограниченном предельном переходе под знаком интеграла. $\square$

Алгоритм динамического программирования для конечного горизонта состоит в последовательном применении оператора T N раз, начиная с функции, тождественно равной нулю на S . Следующая теорема утверждает, что эта процедура приводит к оптимальной функции издержек. В предложении 8.3 мы покажем, как с помощью этого алгоритма могут быть также получены ϵ -оптимальные стратегии.

Предложение 8.2. $(F^+)(F^-)$ Пусть J_0 — функция, тождественно равная нулю на множестве S . Тогда

$$J_K^* = T^K(J_0), \quad K = 1, \dots, N. \quad (18)$$

Доказательство. Равенство (18) достаточно доказать для $K = N$, так как в качестве горизонта N может быть выбрано любое положительное целое число. Для любых стратегии $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi$ и числа $K \leq N$ имеем

$$J_{K, \pi} = (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0) \geq (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-2}} T)(J_0) \geq T^K(J_0), \quad (19)$$

где последнее неравенство получается повторением процесса, использованного для получения первого неравенства. Взяв инфимум по $\pi \in \Pi$ при $K = N$ и используя следствие 8.1.1, получим, что

$$J_N^* \geq T^N(J_0). \quad (20)$$

Если выполняется условие (F^+) , то из леммы 8.3 следует, что $T^k(J_0) > -\infty$, $k = 1, \dots, N$. Для любого $\epsilon > 0$ существуют универсально измеримые селекторы $\hat{\mu}_k: S \rightarrow C$, $k = 0, \dots, N-1$, такие, что $\hat{\mu}_k(x) \in U(x)$ и

$$-\infty < T_{\hat{\mu}_{N-k}}[T^{k-1}(J_0)](x) \leq$$

$$\leq T^k(J_0)(x) + \epsilon / (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-1}), \quad k = 1, \dots, N,$$

для любого $x \in S$ (предложение 7.50). Тогда

$$(T_{\hat{\mu}_0} T_{\hat{\mu}_1} \dots T_{\hat{\mu}_{N-1}})(J_0) \leq (T_{\hat{\mu}_0} T_{\hat{\mu}_1} \dots T_{\hat{\mu}_{N-2}})[T(J_0) +$$

$$+ \epsilon / (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-1})] \leq (T_{\hat{\mu}_0} T_{\hat{\mu}_1} \dots T_{\hat{\mu}_{N-3}})[T^2(J_0) +$$

$$+ \epsilon(1 + \alpha) / (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-1})] \leq T^N(J_0) + \epsilon, \quad (21)$$

где последнее неравенство получается повторением процесса, использованного для получения первых двух неравенств. Отсюда следует, что

$$J_N^* \leq T^N(J_0). \quad (22)$$

Объединяя неравенства (20) и (22), видим, что в предположении (F^+) утверждение доказано.

Если выполняется условие (F^-) , то $J_{K,\pi}(x) < \infty$ для любых $x \in S$, стратегии $\pi \in \Pi$ и $K = 1, \dots, N$. Воспользуемся предложением 7.50 для того, чтобы выбрать нерандомизированные стратегии $\pi^i = (\mu_0^i, \dots, \mu_{N-1}^i) \in \Pi$ такие, чтобы

$$(T_{\mu_k^i} T^{N-k-1})(J_0) \downarrow T^{N-k}(J_0), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

при $i \rightarrow \infty$. Из леммы 8.4 (а) и неравенства (19) следует, что

$$\begin{aligned} J_N^* &\leq \inf_{(i_0, \dots, i_{N-1})} (T_{\mu_0^{i_0}} \dots T_{\mu_{N-1}^{i_{N-1}}})(J_0) = \\ &= \inf_{i_0} \dots \inf_{i_{N-1}} (T_{\mu_0^{i_0}} \dots T_{\mu_{N-1}^{i_{N-1}}})(J_0) = \\ &= \inf_{i_0} \dots \inf_{i_{N-2}} (T_{\mu_0^{i_0}} \dots T_{\mu_{N-2}^{i_{N-2}}}) [\inf_{i_{N-1}} T_{\mu_{N-1}^{i_{N-1}}}(J_0)] = \\ &= \inf_{i_0} \dots \inf_{i_{N-2}} (T_{\mu_0^{i_0}} \dots T_{\mu_{N-2}^{i_{N-2}}} T)(J_0) = T^N(J_0), \end{aligned} \quad (23)$$

где последнее равенство получается повторением процесса, используемого для получения предыдущего равенства. Объединяя неравенство (20) и равенство (23), видим, что утверждение предложения справедливо и в предположении (F^-) . $\square$

В случае, когда пространства состояний, управлений и возмущений являются счетными, модель, сформулированная в определении 8.1, укладывается в рамки конструкции части I. Рассмотрим такую модель, и пусть так же, как в части I, M является множеством отображений $\mu: S \rightarrow C$ таких, что $\mu(x) \in U(x)$ для любого $x \in S$. В разделе 3.2 часто делалось предположение о том, что для любого $x \in S$ и любых функций $\mu_j \in M$, $j = 0, \dots, K-1$, выполняется неравенство

$$(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0)(x) < \infty, \quad K = 1, \dots, N, \quad (24)$$

или еще и неравенство

$$\inf_{\mu_j \in M, 0 \leq j < K-1} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0)(x) > -\infty, \quad K = 1, \dots, N, \quad (25)$$

для любого $x \in S$. В предположении (F^+) из леммы 8.3 следует, что

$$-\infty < T^K(J_0) \leq \inf_{\mu_j \in M, 0 \leq j < K-1} (T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0),$$

поэтому неравенство (25) удовлетворяется. При условии (F^-) из леммы 8.1 следует, что

$$(T_{\mu_0} \dots T_{\mu_{K-1}})(J_0) = J_{K,\pi} < \infty,$$

где $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{K-1})$, поэтому справедливо неравенство (24).

Основной довод в пользу введения более сильных условий (F^+) и (F^-) заключается в том, что это дает нам возможность доказать лемму 8.1. Если вместо этого равенство (16) взять в качестве определения функции $J_{K,\pi}$ (как это сделано в разделе 3.1), то неравенств (24) и (25) будет

достаточно, чтобы доказать предложение 8.2, повторяя доказательство предложения 3.1 из части 1.

Из предложения 8.2 вытекает следующее свойство оптимальной функции издержек.

Следствие 8.2.1. $(F^+)(F^-)$ При $K = 1, 2, \dots, N$ функция J_K^* является полуаналитической снизу.

Доказательство. Как было отмечено после определения 8.5, функция $T(J)$ будет полуаналитической снизу, если таковой является функция J . Значит, результат следует из равенства $J_K^* = T^K(J_0)$ и того факта, что функция $J_0 \equiv 0$ полуаналитическая снизу. $\square$

Приведем пример, показывающий, что даже в том случае, когда $\Gamma = SC$ и функция издержек за один шаг $g: SC \rightarrow R^*$ измерима по Борелю, то функция J_1^* может не быть борелевской.

Пример 1. Пусть A — аналитическое подмножество отрезка $[0, 1]$, не являющееся борелевским (приложение Б). В силу предложения 7.39 существует замкнутое множество $F \subset [0, 1] \cap N$ такое, что $A = \text{proj}_{[0, 1]}(F)$. Пусть $S = [0, 1]$, $C = N$, $\Gamma = SC$ и $g = \chi_{Fc}$. Тогда функция

$$J_1^*(x) = \inf_{u \in C} g(x, u) = \chi_{Ac}(x) \quad \forall x \in S$$

является полуаналитической снизу, но не борелевской. Мы могли бы также выбрать $C = [0, 1]$, $\Gamma = SC$ и $g = \chi_{Bc}$, где $B - G_\delta$ -множество единичного квадрата SC . Это можно сделать, поскольку пространство N гомеоморфно пространству N_0 иррациональных чисел из отрезка $[0, 1]$ (предложение 7.5). Но множество $N_0 = \bigcap_{r \in Q} ([0, 1] - \{r\})$ является G_δ -множеством на отрезке $[0, 1]$, поэтому существует гомеоморфизм $\varphi: N \rightarrow [0, 1]$ такой, что $\varphi(N)$ есть G_δ -множество на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\Phi: [0, 1] \times N \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ есть гомеоморфизм, определяемый формулой $\Phi(x, z) = (x, \varphi(z))$.

Тогда $\Phi([0, 1] \times N) = [0, 1] \times \varphi(N)$ является G_δ -множеством из $SC = [0, 1] \times [0, 1]$, и так как F является G_δ -множеством в $[0, 1] \times N$, то $B = \Phi(F)$ есть G_δ -множество из SC , удовлетворяющее равенству $\text{proj}_S(B) = A$. Если $g = \chi_{Bc}$, то опять же $J_1^* = \chi_{Ac}$.

Воспользуемся теперь предложением 8.2 для установления существования ϵ -оптимальных стратегий.

Предложение 8.3.

(F^+) Для любого числа $\epsilon > 0$ существует нерандомизированная марковская ϵ -оптимальная стратегия.

(F^-) Для любого числа $\epsilon > 0$ существует нерандомизированная полумарковская ϵ -оптимальная стратегия и (рандомизированная) марковская ϵ -оптимальная стратегия.

Доказательство. Если выполняется условие (F^+) , то стратегия $(\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{N-1})$, построенная в ходе доказательства предложения 8.2, является ϵ -оптимальной нерандомизированной и марковской.

Предположим, что выполняется условие (F^-) . Сначала покажем, что существует ϵ -оптимальная нерандомизированная полумарковская стратегия. Пусть стратегия $\pi^i = (\mu_0^i, \dots, \mu_{N-1}^i)$ будет такой же, как и при доказательстве предложения 8.2. Тогда выполняется равенство

$$\begin{aligned} J_N^* &= T^N(J_0) = \inf_{(i_0, \dots, i_{N-1})} (T_{i_0} \dots T_{i_{N-1}})(J_0) = \\ &= \inf_{(i_0, \dots, i_{N-1})} J_{N, \pi^i(i_0, \dots, i_{N-1})} \end{aligned}$$

где $\pi^{(i_0, \dots, i_{N-1})} = (\mu_0^{i_0}, \dots, \mu_{N-1}^{i_{N-1}})$. Выберем число $\epsilon > 0$ и определим функцию

$$\theta(x) = \begin{cases} J_N^*(x) + \epsilon, & \text{если } J_N^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } J_N^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

Линейно упорядочим счетное множество $\{\pi^{(i_0, \dots, i_{N-1})} | i_0, \dots, i_{N-1} \text{ — положительные целые числа}\}$ и положим $\pi(x)$ равным первой из стратегий $\pi^{(i_0, \dots, i_{N-1})}$, удовлетворяющих неравенству

$$J_{N, \pi^{(i_0, \dots, i_{N-1})}}(x) \leq \theta(x).$$

Пусть $\pi(x)$ состоит из $(\mu_0^x(x_0), \mu_1^x(x_1), \dots, \mu_{N-1}^x(x_{N-1}))$. Для любого набора $(i_0, \dots, i_{N-1})$ множество $\{x | \pi(x) = \pi^{(i_0, \dots, i_{N-1})}\}$ универсально измеримо, поэтому набор

$$(\mu_0(x_0), \mu_1(x_0, x_1), \dots, \mu_{N-1}(x_0, x_{N-1})),$$

где $\mu_0(x_0) = \mu_0^{x_0}(x_0)$ и $\mu_k(x_0, x_k) = \mu_k^{x_0}(x_k)$, $k = 1, \dots, N-1$, представляет собой ϵ -оптимальную нерандомизированную полумарковскую стратегию.

Покажем теперь, что существует ϵ -оптимальная (рандомизированная) марковская стратегия. По лемме 8.2 существует ядро $\mu_{N-k} \in U(C|S)$ такое, что неравенство

$$(T_{\mu_{N-k}} T^{k-1})(J_0) \leq T^k(J_0) + \epsilon/(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{N-1})$$

выполняется для $k = 1, \dots, N$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что использовались при получении неравенства (21). $\square$

Следующий пример показывает, что при условии (F^-) для некоторого $\epsilon > 0$ может не существовать нерандомизированной марковской ϵ -оптимальной стратегии.

Пример 2. Пусть $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $C = \{1, 2, \dots\}$, $W = \{w_1, w_2\}$, $\Gamma = SC$, $N = 2$ и

$$g(x, u) = \begin{cases} -u & \text{при } x = 1, \\ 0 & \text{при } x \neq 1, \end{cases}$$

$$f(x, u, w) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \text{ или } x = 1, \text{ или } w = w_1, \\ 1 & \text{при } x \neq 0, x \neq 1 \text{ и } w = w_2. \end{cases}$$

$$p(\{w_1\} | x, u) = 1 - 1/x \quad \text{при } x \neq 0, x \neq 1,$$

$$p(\{w_2\} | x, u) = 1/x \quad \text{при } x \neq 0, x \neq 1.$$

Условие (F^-) здесь выполняется. Пусть $\pi = (\mu_0, \mu_1)$ — нерандомизированная марковская стратегия. Если начальное состояние x_0 не равно ни нулю, ни единице, то независимо от применяемой стратегии $x_1 = 0$ с вероятностью $1 - (1/x_0)$ и $x_1 = 1$ с вероятностью $1/x_0$. Стоит системе попасть в нулевое состояние, как она остается там без дальнейших издержек. Если система достигает единичного состояния, то она переходит в состояние $x_2 = 0$ с издержками, равными $-\mu_1(1)$. Таким образом, $J_{N, \pi}(x_0) = -\mu_1(1)/x_0$.

если $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$ и $J_N^*(x_0) = -\infty$, если $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$. Ни при каком числе $\epsilon > 0$ стратегия π не может быть ϵ -оптимальной.

В примере 2 можно найти последовательность нерандомизированных марковских стратегий $\{\pi_n\}$ такую, что имеет место сходимость $J_N, \pi_n \downarrow J_N^*$. Этот пример приводит к понятию стратегий, обладающих $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности (определение 8.3), и к предложению 8.4, которое доказывается с помощью следующей леммы.

Л е м м а 8.5. Пусть $\{J_k\}$ — последовательность универсально измеримых функций на S со значениями в R^* , а μ — универсально измеримая функция на S со значениями в C , график которой лежит в Γ . Предположим, что для некоторой последовательности положительных чисел $\{\epsilon_k\}$, такой, что $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty$, выполняются условия

$$\int J_1^*(x') \, t(dx' | x, \mu(x)) < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} J_k(x) = J(x)$$

для любого $x \in S$ и

$$J(x) \leq J_k(x) \leq J(x) + \epsilon_k, \quad \text{если } J(x) > -\infty,$$

$$J_k(x) \leq J_{k-1}(x) + \epsilon_k, \quad \text{если } J(x) = -\infty$$

для $k = 2, 3, \dots$ Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_\mu(J_k) = T_\mu(J). \quad (26)$$

Доказательство. Так как $J \leq J_k$ для любого k , то очевидно, что

$$T_\mu(J) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} T_\mu(J_k). \quad (27)$$

Для любого $x \in S$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} T_\mu(J_k)(x) \leq g[x, \mu(x)] +$$

$$+ \alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\{x' | J(x') > -\infty\}} J_k(x') \, t(dx' | x, \mu(x)) +$$

$$+ \alpha \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\{x' | J(x') = -\infty\}} J_k(x') \, t(dx' | x, \mu(x)).$$

Далее,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\{x' | J(x') > -\infty\}} J_k(x') \, t(dx' | x, \mu(x)) \leq$$

$$\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\{x' | J(x') > -\infty\}} J(x') \, t(dx' | x, \mu(x)) + \epsilon_k =$$

$$= \int_{\{x' | J(x') > -\infty\}} J(x') \, t(dx' | x, \mu(x)).$$

Если $J(x') = -\infty$, то

$$J_k(x') + \sum_{n=k+1}^{\infty} \epsilon_n \downarrow J(x'),$$

и так как

$$\int [J_1^*(x') + \sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n] \, t(dx' | x, \mu(x)) < \infty,$$

то имеем

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\{x' | J(x') = -\infty\}} J_k(x') t(dx' | x, \mu(x)) \leq \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\{x' | J(x') = -\infty\}} [J_k(x') + \sum_{n=k+1}^{\infty} \epsilon_n] t(dx' | x, \mu(x)) = \\ & = \int_{\{x' | J(x') = -\infty\}} J(x') t(dx' | x, \mu(x)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} T_{\mu}(J_k) \leq T_{\mu}(J). \quad (28)$$

Объединяя неравенства (27) и (28), приходим к равенству (26). $\square$

Предложение 8.4. (F^-) Пусть $\{\epsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\epsilon_n \downarrow 0$. Тогда существует последовательность нерандомизированных марковских стратегий $\{\pi_n\}$, обладающая $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности. В частности, если $J_N^*(x) > -\infty$ для всех $x \in S$, то для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная нерандомизированная марковская стратегия.

Доказательство. При $N = 1$, в силу предложения 7.50, существует последовательность нерандомизированных марковских стратегий $\pi_n = \{\mu_n^1\}$ такая, что для всех n выполняется неравенство

$$T_{\mu_n^1}(J_0)(x) \leq \begin{cases} T(J_0)(x) + \epsilon_n, & \text{если } T(J_0)(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon_n, & \text{если } T(J_0)(x) = -\infty. \end{cases}$$

Без потери общности можем предположить, что $T_{\mu_n^1}(J_0) \leq T_{\mu_{n-1}^1}(J_0)$.

Следовательно, последовательность $\{\pi_n\}$ обладает $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности при единичном горизонте.

Предположим теперь, что результат справедлив для $N - 1$. Пусть $\pi_n = (\mu_n^1, \dots, \mu_{N-1}^n)$ — последовательность нерандомизированных марковских $(N-1)$ -шаговых стратегий, обладающая $\{\epsilon_n/2\alpha\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности при горизонте $N - 1$, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{N-1, \pi_n} = J_{N-1}^*,$$

$$J_{N-1, \pi_n}(x) \leq \begin{cases} J_{N-1}^*(x) + (\epsilon_n/2\alpha), & \text{если } J_{N-1}^*(x) > -\infty, \\ J_{N-1, \pi_{n-1}}(x) + (\epsilon_n/2\alpha), & \text{если } J_{N-1}^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (29)$$

$$J_{N-1, \pi_n}(x) \leq \begin{cases} J_{N-1}^*(x) + (\epsilon_n/2\alpha), & \text{если } J_{N-1}^*(x) > -\infty, \\ J_{N-1, \pi_{n-1}}(x) + (\epsilon_n/2\alpha), & \text{если } J_{N-1}^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (30)$$

Без потери общности можно предположить, что $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. В силу предложения 7.50 существует последовательность $\{\mu_n^N\}$ универсально измеримых функций на S со значением в C , чьи графики лежат в Γ , и такая, что

$$T_{\mu_n^N}(J_{N-1}^*)(x) \leq \begin{cases} J_N^*(x) + (\epsilon_n/2), & \text{если } J_N^*(x) > -\infty, \\ -2/\epsilon_n, & \text{если } J_N^*(x) = -\infty. \end{cases} \quad (31)$$

Также без потери общности можно предположить, что

$$T_{\mu_n^N}(J_{N-1}^*) \leq T_{\mu_{n-1}^N}(J_{N-1}^*), \quad n = 2, 3, \dots \quad (32)$$

В силу предложения 7.48 множество

$$A(J_{N-1}^*) = \{(x, u) \in \Gamma \mid t(\{x' \mid J_{N-1}^*(x') = -\infty\} \mid x, u) > 0\} = \\ = \{(x, u) \in \Gamma \mid \int -\chi_{\{x' \mid J_{N-1}^*(x') = -\infty\}}(x') t(dx' \mid x, u) < 0\} \quad (33)$$

является аналитическим в SC , поэтому из теоремы Янкова – фон Неймана (предложение 7.49) вытекает существование универсально измеримой функции $\mu: \text{proj}_S[A(J_{N-1}^*)] \rightarrow C$, график которой лежит в множестве $A(J_{N-1}^*)$. Определим функцию

$$\hat{\mu}^n(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{при } x \in \text{proj}_S[A(J_{N-1}^*)], \\ \mu^n(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\hat{\pi}_n = (\hat{\mu}^n, \pi_n)$ является нерандомизированной N -шаговой марковской стратегией, которая, как будет показано, обладает $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности.

При $x \in \text{proj}_S[A(J_{N-1}^*)]$ из леммы 8.5 и выбора функции μ вытекает, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} J_{N, \hat{\pi}_n}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} T_\mu(J_{N-1}, \pi_n)(x) = \\ = T_\mu(J_{N-1}^*)(x) = -\infty.$$

При $x \notin \text{proj}_S[A(J_{N-1}^*)]$ для любого $u \in U(x)$ имеем $t(\{x' \mid J_{N-1}^*(x') = -\infty\} \mid x, u) = 0$, поэтому из неравенства (29) следует, что

$$J_{N, \hat{\pi}_n}(x) = T_{\mu_n}(J_{N-1}, \pi_n)(x) \leq T_{\mu_n}(J_{N-1}^*)(x) + \epsilon_n/2 \quad (34)$$

а из неравенства (31) следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} J_{N, \hat{\pi}_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} T_{\mu_n}(J_{N-1}^*)(x) \leq J_N^*(x).$$

Это приводит к равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{N, \hat{\pi}_n} = J_N^*. \quad (35)$$

Предположим, что для фиксированного $x \in S$ выполняется неравенство $J_N^*(x) > -\infty$. Тогда $x \notin \text{proj}_S[A(J_{N-1}^*)]$ и из неравенств (31) и (34) получаем, что

$$J_{N, \hat{\pi}_n}(x) \leq T_{\mu_n}(J_{N-1}^*)(x) + \epsilon_n/2 \leq J_N^*(x) + \epsilon_n. \quad (36)$$

Предположим теперь, что $J_N^*(x) = -\infty$. Если $x \notin \text{proj}_S[A(J_{N-1}^*)]$, тогда из неравенства (32) и (34) следует, что для $n \geq 2$

$$J_{N, \hat{\pi}_n}(x) \leq T_{\mu_n}(J_{N-1}^*)(x) + \epsilon_n/2 \leq \\ \leq T_{\mu_{n-1}}(J_{N-1}^*)(x) + \epsilon_n/2 \leq \\ \leq T_{\mu_{n-1}}(J_{N-1}, \pi_{n-1})(x) + \epsilon_n/2 \leq \\ \leq J_{N, \hat{\pi}_{n-1}}(x) + \epsilon_n/2,$$

в то время как, если $x \in \text{proj}_S[A(J_{N-1}^*)]$, то из неравенств (29) и (30)

получим, что

$$\begin{aligned} J_{N, \hat{\pi}_n}(x) &= T_{\mu}(J_{N-1, \pi_n})(x) \leq \\ &\leq T_{\mu}(J_{N-1, \pi_{n-1}})(x) + \epsilon_n/2 = J_{N, \hat{\pi}_{n-1}}(x) + \epsilon_n/2. \end{aligned}$$

В том и другом случае

$$J_{N, \hat{\pi}_n}(x) \leq J_{N, \hat{\pi}_{n-1}}(x) + \epsilon_n. \quad (37)$$

Из соотношений (35)–(37) видно, что последовательность $\{\hat{\pi}_n\}$ обладает $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности. $\square$

Мы завершаем рассмотрение вопросов, связанных с предложением 8.2, одним техническим результатом, который понадобится в главе 10.

Лемма 8.6. (F^+) (F^-) Для любого ядра $p \in P(S)$ выполняется равенство

$$\int J_N^*(x) p(dx) = \inf_{\pi \in \Pi} \int J_{N, \pi}(x) p(dx).$$

Доказательство. Для ядра $p \in P(S)$ и стратегии $\pi \in \Pi$ справедливо неравенство

$$\int J_N^*(x) p(dx) \leq \int J_{N, \pi}(x) p(dx),$$

из которого следует, что

$$\int J_N^*(x) p(dx) \leq \inf_{\pi \in \Pi} \int J_{N, \pi}(x) p(dx). \quad (38)$$

Выберем число $\epsilon > 0$, и пусть $\hat{\pi} \in \Pi$ является ϵ -оптимальной стратегией. Если $p(\{x | J_N^*(x) = -\infty\}) = 0$, то

$$\int J_{N, \hat{\pi}}(x) p(dx) \leq \int J_N^*(x) p(dx) + \epsilon,$$

а отсюда следует, что

$$\inf_{\pi \in \Pi} \int J_{N, \pi}(x) p(dx) \leq \int J_N^*(x) p(dx). \quad (39)$$

Если $p(\{x | J_N^*(x) = -\infty\}) > 0$, то выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \int J_{N, \hat{\pi}}(x) p(dx) &\leq -p(\{x | J_N^*(x) = -\infty\})/\epsilon + \\ &+ \int_{\{x | J_N^*(x) > -\infty\}} J_N^*(x) p(dx) + \epsilon, \end{aligned} \quad (40)$$

Если

$$\int_{\{x | J_N^*(x) > -\infty\}} J_N^*(x) p(dx) = \infty,$$

то

$$\int J_N^*(x) p(dx) = \infty,$$

и это влечет за собой неравенство (39). В противном случае правую часть неравенства (40) можно сделать сколь угодно малой за счет выбора малого ϵ , поэтому

$$\inf_{\pi \in \Pi} \int J_{N, \pi}(x) p(dx) = -\infty,$$

и неравенство (39) вновь имеет место. Утверждение леммы следует из неравенств (38) и (39). $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о построении оптимальной стратегии, когда это вообще возможно. Если алгоритм динамического программирования может быть использован для построения оптимальной стратегии, то обычно эта стратегия удовлетворяет более сильному условию, чем просто оптимальность. Это условие дается в следующем определении.

Определение 8.6. Пусть $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ — марковская стратегия и $\pi^{N-k} = (\mu_k, \dots, \mu_{N-1})$, $k = 0, \dots, N-1$. Стратегия π *равномерно оптимальна при горизонте N* , если

$$J_{N-k, \pi}^{N-k} = J_{N-k}^*, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Лемма 8.7. (F^+) , (F^-) Стратегия $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi$ *равномерно оптимальна при горизонте N тогда и только тогда, когда*

$$T_{\mu_k} T^{N-k-1}(J_0) = T^{N-k}(J_0), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если стратегия $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$ *равномерно оптимальна при горизонте N* , то

$$\begin{aligned} T^{N-k}(J_0) &= J_{N-k}^* = J_{N-k, \pi}^{N-k} = T_{\mu_k}(J_{N-k-1, \pi}^{N-k-1}) = \\ &= T_{\mu_k}(J_{N-k-1}^*) = (T_{\mu_k} T^{N-k-1})(J_0), \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где $J_{0, \pi^0} = J_0^* \equiv 0$. Наоборот, если выполняются равенства

$$(T_{\mu_k} T^{N-k-1})(J_0) = T^{N-k}(J_0), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

то

$$\begin{aligned} J_{N-k}^* &= T^{N-k}(J_0) = (T_{\mu_k} T^{N-k-1})(J_0) = \\ &= (T_{\mu_k} T_{\mu_{k+1}} T^{N-k-2})(J_0) = (T_{\mu_k} \dots T_{\mu_{N-1}})(J_0) = J_{N-k, \pi}^{N-k}, \end{aligned}$$

для всех k (равенство, предшествующее последнему, получается повторением процесса, использованного для получения предыдущих равенств). $\square$

Лемма 8.7 является аналогом предложения 3.3, только теперь вместо модели из части I рассматривается борелевская модель. Поскольку в лемме 8.1 делается предположение (F^+) или (F^-) , то, как показывает следующий пример, одно из этих условий требуется и в лемме 8.7. Если принять равенство (16) за определение функции $J_{k, \pi}$, то лемма 8.7, предложение 8.5 и следствия 8.5.1 и 8.5.2 будут справедливы без предположения (F^+) или (F^-) . Доказательства аналогичны тем, что приведены в разделе 3.2.

П р и м е р 3. Пусть $S = \{s, t\} \cup \{(k, j) \mid k = 1, 2, \dots; j = 1, 2\}$, $C = \{a, b\}$, $U(s) = \{a, b\}$, $U(t) = U(k, j) = \{b\}$, $k = 1, 2, \dots, j = 1, 2$, $W = S$ и $\alpha = 1$. Пусть ядро возмущений задается формулами

$$p(s|s, a) = 1,$$

$$p[(k, 1)|s, b] = p[(k, 2)|(l, 1), b] = k^{-2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{-1}, \quad k, l = 1, 2, \dots,$$

$$p[t|(k, 2), b] = 1, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ и } p[t|t, b] = 1.$$

Пусть функция системы равна $f(x, u, w) = w$. Таким образом, если система начинает функционировать из состояния s , то мы можем оставить систему в этом состоянии или дать ей возможность перейти в некоторое состояние $(l, 1)$, из которого она последовательно переходит в некоторое состоя-

ние $(k, 2)$, а затем — в состояние t . Достигнув состояния t , система остается в нем. Соответствующие издержки равны $g(s, a) = g(s, b) = g(t, b) = 0$, $g[(k, 1), b] = k$, $g[(k, 2), b] = -k$, $k = 1, 2, \dots$

Пусть $\pi = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ — стратегия с функциями $\mu_0(s) = b$, $\mu_1(s) = \mu_2(s) = a$. Тогда

$$T(J_0)(x_2) = T_{\mu_2}(J_0)(x_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_2 = s, \\ k & \text{при } x_2 = (k, 1), \\ -k & \text{при } x_2 = (k, 2), \\ 0 & \text{при } x_2 = t, \end{cases}$$

$$T^2(J_0)(x_1) = (T_{\mu_1} T_{\mu_2})(J_0)(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 = s, \\ -\infty & \text{при } x_1 = (k, 1), \\ -k & \text{при } x_1 = (k, 2), \\ 0 & \text{при } x_1 = t, \end{cases}$$

$$T^3(J_0)(x_0) = (T_{\mu_0} T_{\mu_1} T_{\mu_2})(J_0)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{при } x_0 = s, \\ -\infty & \text{при } x_0 = (k, 1), \\ -k & \text{при } x_0 = (k, 2), \\ 0 & \text{при } x_0 = t. \end{cases}$$

Однако $J_{\pi, 3}(s) = \infty > J_{\bar{\pi}, 3}(s) = 0$, где $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$ и $\bar{\mu}_0(s) = \bar{\mu}_1(s) = \bar{\mu}_2(s) = a$, поэтому стратегия π не является оптимальной и $T^3(J_0) \neq J_3^*$. Легко проверить, что $\bar{\pi}$ является равномерно оптимальной при горизонте 3, поэтому следствие 3.3.1(б) оказывается несправедливым для борелевской модели, рассматриваемой в этой главе. Здесь оба условия (F^+) и (F^-) нарушены.

Предложение 8.5. (F^+) (F^-) Если инфимум в выражении

$$\inf_{u \in U(x)} \{ g(x, u) + \alpha \int J_k^*(x') t(dx' | x, u) \}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (41)$$

достигается при любом $x \in S$, где функция J_0^* есть тождественный нуль, то существует равномерно оптимальная при горизонте N (и, следовательно, оптимальная) нерандомизированная марковская стратегия. Эта стратегия порождается алгоритмом динамического программирования, т.е. измеримым выбором для каждого состояния x такого управления u , которое доставляет инфимум в выражении (41).

Доказательство. Пусть $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$, где функция $\mu_{N-k-1}: S \rightarrow C$ доставляет инфимум в выражении (41) и удовлетворяет условию $\mu_{N-k-1}(x) \in U(x)$ при любых $x \in S$ и $k = 0, \dots, N-1$ (предложение 7.50). Далее применяем лемму 8.7. $\square$

Следствие 8.5.1. (F^+) (F^-) Если множество $U(x)$ конечно при любом $x \in S$, то существует равномерно оптимальная при горизонте N нерандомизированная марковская стратегия.

Следствие 8.5.2. (F^+) (F^-) Если при любых $x \in S$, $\lambda \in R$ и $k = 0, \dots, N-1$ множество

$$U_k(x, \lambda) = \{ u \in U(x) \mid g(x, u) + \alpha \int J_k^*(x') t(dx' | x, u) \leq \lambda \}$$

компактно, то существует равномерно оптимальная при горизонте N нерандомизированная марковская стратегия.

Доказательство. Применяем лемму 3.1 к предложению 8.5. $\square$

8.3. Полунепрерывные модели

В духе результатов, полученных нами в разделе 7.5 для полунепрерывных снизу и сверху функций, мы можем изучить полунепрерывные снизу и сверху модели принятия решений. Наши модели будут обладать преимуществом, которое дает возможность измеримого по Борелю выбора (предложения 7.33 и 7.34), а достижение инфимума в выражении (55) из главы 7 — в случае полунепрерывности снизу. Сначала рассмотрим полунепрерывную снизу модель.

Определение 8.7. Полунепрерывная снизу модель стохастического оптимального управления с конечным горизонтом задается девятью элементами $(S, C, U, W, p, f, \alpha, g, N)$, введенными в определении 8.1, обладающими следующими дополнительными свойствами:

- (а) пространство управлений C компактно;
- (б) множество Γ , определенное формулой (1), имеет вид $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma^j$, где $\Gamma^1 \subset \Gamma^2 \subset \dots$, каждое множество Γ^j замкнуто в SC и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{(x, u) \in \Gamma^j - \Gamma^{j-1}} g(x, u) = \infty^*;$$

- (в) ядро возмущений $p(dw|x, u)$ непрерывно на множестве Γ ;
- (г) функция системы f непрерывна на множестве ΓW ;
- (д) функция издержек за один шаг g полунепрерывна снизу и ограничена снизу на множестве Γ .

Из условий (в) и (г) определения 8.7 и предложения 7.30 следует, что ядро $t(dx'|x, u)$, определенное формулой (3), непрерывно на множестве Γ , так как для любой функции $h \in C(S)$ мы имеем

$$\int h(x') t(dx'|x, u) = \int h[f(x, u, w)] p(dw|x, u).$$

Из условия (д) следует, что выполнено предположение (F^+) .

Предложение 8.6. Рассмотрим полунепрерывную снизу модель с конечным горизонтом из определения 8.7. Оптимальная функция издержек за k шагов J_k^* полунепрерывна снизу и ограничена снизу и равна $J_k^* = T^k(J_0)$ при $k = 1, 2, \dots, N$. Далее, существует измеримая по Борелю равномерно оптимальная при горизонте N нерандомизированная марковская стратегия.

Доказательство. Предположим, что функция $J: S \rightarrow R^*$ полунепрерывна снизу и ограничена снизу, и определим функцию $K: \Gamma \rightarrow R^*$ формулой

$$K(x, u) = g(x, u) + \alpha \int J(x') t(dx'|x, u). \quad (42)$$

Доопределим функцию K на всем множестве SC , полагая

$$\hat{K}(x, u) = \begin{cases} K(x, u), & \text{если } (x, u) \in \Gamma, \\ \infty, & \text{если } (x, u) \notin \Gamma. \end{cases}$$

Из предложения 7.31 (а) и замечаний к лемме 7.13 следует, что функция K полунепрерывна снизу на множестве Γ . По определению 7.8 (б) для $c \in R$ множество $\{(x, u) \in SC | \hat{K}(x, u) \leq c\}$ должно содержаться в некотором множестве Γ^k , поэтому множество

$$\{(x, u) \in SC | \hat{K}(x, u) \leq c\} = \{(x, u) \in \Gamma^k | K(x, u) \leq c\}$$

замкнуто в Γ^k и, следовательно, замкнуто также и в SC . Отсюда следует,

* По принятому нами соглашению инфимум по пустому множеству равен ∞ , поэтому это условие выполняется, если все множества Γ^j совпадают, начиная с некоторого номера k .

что функция $\hat{K}(x, u)$ полунепрерывна снизу и ограничена снизу на множестве SC , и в силу предложения 7.32 этими же свойствами обладает функция

$$T(U)(x) = \inf_{u \in C} \hat{K}(x, u). \quad (43)$$

Более того, предложение 7.33 утверждает, что инфимум в выражении (43) достигается в каждой точке $x \in S$, и существует измеримая по Борелю функция $\varphi: S \rightarrow C$ такая, что $T(U)(x) = \hat{K}[x, \varphi(x)]$ для всех $x \in S$.

Пусть для $j = 1, 2, \dots$, $\varphi_j: \text{proj}_S(\Gamma^j) \rightarrow C$ — борелевская функция с графиком в Γ^j . (Для доказательства существования такой функции в предложении 7.33 положим $D = \Gamma^j$.) Определим функцию $\mu: S \rightarrow C$ так, чтобы $\mu(x) = \varphi(x)$, если $T(U)(x) < \infty$, $\mu(x) = \varphi_1(x)$, если $T(U)(x) = \infty$ и $x \in \text{proj}_S(\Gamma^1)$, а для $j = 2, 3, \dots$ положим $\mu(x) = \varphi_j(x)$, если $T(U)(x) = \infty$ и $x \in \text{proj}_S(\Gamma^j) - \text{proj}_S(\Gamma^{j-1})$. Тогда функция μ измерима по Борелю, $\mu(x) \in U(x)$ для любого $x \in S$ и $T_\mu(U) = T(U)$.

Так как функция $J_0 \equiv 0$ полунепрерывна снизу и ограничена снизу, то из приведенных выше рассуждений следует, что функция $J_k^* = T^k(J_0)$ также обладает этими свойствами и, более того, для любого $k = 0, \dots, N-1$ существует измеримая по Борелю функция $\mu_k: S \rightarrow C$ такая, что $\mu_k(x) \in U(x)$ для любого $x \in S$ и $(T_{\mu_k} T^{N-k-1})(J_0) = T^{N-k}(J_0)$. Теперь утверждение предложения следует из леммы 8.7. $\square$

Заметим, что хотя условие (а) определения 8.7 требует компактности множества C , утверждение предложения 8.6 справедливо и в том случае, когда множество C не является компактным, но может быть гомеоморфно вложено в компактное пространство $\hat{C}$ таким образом, что образ множества Γ^j , $j = 1, 2, \dots$, будет замкнут в $S\hat{C}$. Другими словами, предложение справедливо, если существует компактное пространство $\hat{C}$ и гомеоморфизм $\varphi: C \rightarrow \hat{C}$ такие, что при $j = 1, 2, \dots$ множество $\Phi(\Gamma^j)$ замкнуто в $S\hat{C}$, где $\Phi(x, u) = (x, \varphi(u))$. Такое вложение не затрагивает свойства непрерывности функций f и ядра $p(dw|x, u)$, а также полунепрерывности снизу функции g . В частности, если множество Γ^j компактно для любого j , то для такого перехода можно положить $\hat{C} = N$ и воспользоваться теоремой Урысона (предложение 7.2) и тем фактом, что непрерывный образ компактного множества компактен. Мы сформулируем этот последний результат как следствие.

Следствие 8.6.1. *Утверждения предложения 8.6 остаются справедливыми, если в определении 8.7 вместо предположения о компактности множества C^j и замкнутости каждого множества Γ^j предположить компактность каждого множества Γ^j .*

Определение 8.8. *Полунепрерывная сверху модель стохастического оптимального управления с конечным горизонтом задается девятью величинами $(S, C, U, W, p, f, \alpha, g, N)$, введенными в определении 8.1, обладающими следующими дополнительными свойствами:*

- (а) множество Γ , определенное формулой (1), открыто в SC ;
- (б) ядро возмущений $p(dw|x, u)$ непрерывно на множестве Γ ;
- (в) функция системы f непрерывна на множестве ΓW ;
- (г) функция издержек за один шаг g полунепрерывна сверху и ограничена сверху на множестве Γ .

Так же, как и в полунепрерывной снизу модели, стохастическое ядро $t(dx^*|x, u)$ непрерывно в полунепрерывной сверху модели. Для полунепрерывной сверху модели выполняется условие (F^-) . Если функция $J: S \rightarrow R^*$ полунепрерывна сверху и ограничена сверху, то функция $K: \Gamma \rightarrow R^*$, определенная формулой (42), полунепрерывна сверху и ограничена сверху.

В силу предложения 7.34 функция

$$T(U)(x) = \inf_{u \in U(x)} K(x, u)$$

полу непрерывна сверху и для любого числа $\epsilon > 0$ существует измеримая по Борелю функция $\mu: S \rightarrow C$ такая, что $\mu(x) \in U(x)$ для любого $x \in S$, и выполняется неравенство

$$T_\mu(U)(x) \leq \begin{cases} T(U)(x) + \epsilon, & \text{если } T(U)(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } T(U)(x) = -\infty. \end{cases}$$

Так как функция $J_0 \equiv 0$ полу непрерывна сверху и ограничена сверху, то $J_k^* = T^k(J_0)$ для $k = 1, 2, \dots, N$. Если параллельно с доказательством части (F') предложения 8.3 воспользоваться этими фактами, то получим следующее предложение.

Предложение 8.7. *Рассмотрим полу непрерывную сверху модель с конечным горизонтом, данную в определении 8.8. Оптимальная функция издержек за k шагов J_k^* полу непрерывна сверху и ограничена сверху и $J_k^* = T^k(J_0)$ при $k = 1, 2, \dots, N$. Для любого числа $\epsilon > 0$ существует измеримая по Борелю нерандомизированная полумарковская ϵ -оптимальная стратегия и измеримая по Борелю (рандомизированная) марковская ϵ -оптимальная стратегия.*

На самом деле для справедливости предложения 8.7 нет необходимости требовать, чтобы S и C были борелевскими пространствами. Используя результат о полу непрерывности сверху из раздела 7.5 и другие предположения из определения полу непрерывной сверху модели, можно доказать утверждения предложения 8.7 в предположении, что S и C являются сепарабельными метрическими пространствами.

Невозможно параллельно доказательству предложения 8.4 показать для полу непрерывной сверху модели, что для любой последовательности положительных чисел $\{\epsilon_n\}$, такой, что $\epsilon_n \downarrow 0$, существует последовательность измеримых по Борелю нерандомизированных марковских стратегий, обладающая $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности. Множество $A(J_{N-1}^*)$, определенное формулой (33), может не быть открытым, поэтому доказательство не проходит, если ограничиться классом измеримых по Борелю стратегий.

Мы завершаем этот раздел рассмотрением очень важного случая, когда ядро возмущений $p(dw|x, u)$ непрерывно. Если W есть n -мерное евклидово пространство и распределение величины w задается плотностью $d(w|x, u)$, которая непрерывна по паре (x, u) при каждом фиксированном значении w , то ядро $p(dw|x, u)$ непрерывно. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим открытое множество G в пространстве W , и пусть $(x_n, u_n) \rightarrow (x, u)$ в пространстве SC . Тогда из леммы Фату следует, что

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} p(G|x_k, u_k) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_G d(w|x_k, u_k) dw \geq \\ &\geq \int_G d(w|x, u) dw = p(G|x, u). \end{aligned}$$

Непрерывность ядра $p(dw|x, u)$ следует из предложения 7.21*).

*) Заметим, что по той же самой причине

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} p(G^c|x_k, u_k) \geq p(G^c|x, u),$$

поэтому $p(G|x_k, u_k) \rightarrow p(G|x, u)$. При этом условии предположение о том, что функция системы непрерывно зависит от состояния (определения 8.7 (г) и 8.8 (в)), может быть ослаблено [39, 75].

На самом деле не обязательно, чтобы функция d была непрерывна по (x, u) при любом w , а нужно лишь, чтобы из сходимости $(x_n, u_n) \rightarrow (x, u)$ следовала сходимость $d(w|x_n, u_n) \rightarrow d(w|x, u)$ для почти всех по мере Лебега значений w . Например, при $W = R$ экспоненциальная плотность

$$d(w|x, u) = \begin{cases} \exp[-(w - m(x, u))], & w \geq m(x, u), \\ 0, & w < m(x, u), \end{cases}$$

где функция $m: SC \rightarrow R$ непрерывна, обладает этим свойством, но не при каждом $w \in R$ непрерывна по (x, u) .

Глава 9

БОРЕЛЕВСКИЕ МОДЕЛИ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

Первый подход к анализу модели принятия решений с бесконечным горизонтом заключается в том, чтобы рассматривать ее как предел модели с конечным горизонтом, при горизонте, стремящемся к бесконечности. Такой подход оправдывается в случае (N) неположительных издержек за один шаг и в случае (D) ограниченных издержек за один шаг с коэффициентом дисконтирования меньше единицы. Однако в случае (P) неотрицательных издержек за один шаг оптимальные функции издержек на конечном горизонте могут не сходиться к оптимальной функции издержек на бесконечном горизонте (пример 1 в этой главе) и нарушение сходимости может быть даже таким, что каждая оптимальная функция издержек при конечном горизонте измерима по Борелю, а оптимальная функция издержек на бесконечном горизонте не обладает этим свойством (пример 2). Поэтому необходим независимый подход к моделям с бесконечным горизонтом. Наш метод будет заключаться в рассмотрении двух моделей — стохастической модели и эквивалентной ей детерминированной модели. В детерминированной модели нет ограничений на измеримость стратегий, и к этой модели может непосредственно применяться теория, развитая в части I или в книге Бертсекаса [12]. После этого мы перенесли полученные результаты на стохастическую модель. В разделах 9.1–9.3 рассматриваются указанные две модели и устанавливается связь между ними. В разделах 9.4–9.6 стохастическая модель анализируется с помощью ее детерминированного аналога.

9.1. Стохастическая модель

Определение 9.1. *Стохастическая модель оптимального управления с бесконечным горизонтом, обозначаемая далее (SM), задается восемью элементами $(S, C, U, W, p, f, \alpha, g)$, приведенными в определении 8.1. Будем рассматривать три случая (множество Γ определяется формулой (1) из главы 8):*

- (P) $0 \leq g(x, u)$ для любых $(x, u) \in \Gamma$.
- (N) $g(x, u) \leq 0$ для любых $(x, u) \in \Gamma$.
- (D) $0 < \alpha < 1$ и $-b \leq g(x, u) \leq b$ для любых $(x, u) \in \Gamma$ при некотором числе $b \in R$.

Таким образом, на самом деле мы рассматриваем три модели: (P), (N) и (D). Если какой-либо результат применим к одной из этих мо-

делей, то будет появляться соответствующий символ. Предположения (P), (N) и (D) заменяют условия (F⁺) и (F⁻) из главы 8.

Определение 9.2. Стратегией в модели (SM) называется последовательность $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ такая, что при любом k функция $\mu_k(du_k | x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$ есть универсально измеримое стохастическое ядро на C при условии $SC \dots CS$, удовлетворяющее равенству

$$\mu_k(U(x_k) | x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k) = 1$$

для любой истории $(x_0, u_0, \dots, u_{k-1}, x_k)$. Понятия полумарковской, марковской, нерандомизированной и F-измеримой стратегий аналогичны тем, что введены в определении 8.2. Обозначим через Π' множество всех стратегий для модели (SM), а через Π — множество всех марковских стратегий. Если π — марковская стратегия вида $\pi = (\mu, \mu, \dots)$, то говорят, что она стационарная.

Как и в главе 8, мы часто для ясности индексируем множества S и C , понимая под S_k копию множества S , а под C_k — копию множества C . Предположим, что $p \in P(S)$ и $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ — стратегия в модели (SM). В силу предложения 7.45 существует последовательность единственных вероятностных мер $r_N(\pi, p)$ на множестве $S_0 C_0 \dots S_{N-1} C_{N-1}$, $N = 1, 2, \dots$, такая, что для любого N и любой универсально измеримой функции $h: S_0 C_0 \dots S_{N-1} C_{N-1} \rightarrow R^*$, которая удовлетворяет одному из двух неравенств $\int h^* dr_N(\pi, p) < \infty$ или $\int h^- dr_N(\pi, p) < \infty$, выполняется равенство (4) из главы 8. Далее, существует единственная вероятностная мера $r(\pi, p)$ на множестве $S_0 C_0 S_1 C_1 \dots$ такая, что для любого N проекция меры $r(\pi, p)$ на множество $S_0 C_0 \dots S_{N-1} C_{N-1}$ равна $r_N(\pi, p)$. Определив таким образом меры $r_N(\pi, p)$ и $r(\pi, p)$, мы можем перейти к определению издержек, соответствующих какой-либо стратегии.

Определение 9.3. Предположим, что π — стратегия в модели (SM). Издержки (при бесконечном горизонте), соответствующие стратегии π , в состоянии $x \in S$ равны

$$J_\pi(x) = \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k g(x_k, u_k) \right] dr(\pi, p_x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int g(x_k, u_k) dr_k(\pi, p_x)^* \quad (1)$$

Если $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ — стационарная стратегия, то вместо J_π мы будем иногда писать J_μ . Оптимальные издержки (при бесконечном горизонте) в состоянии x равны

$$J^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_\pi(x) \quad (2)$$

При $\epsilon > 0$ стратегия π называется ϵ -оптимальной в состоянии x , если

$$J_\pi(x) \leq \begin{cases} J^*(x) + \epsilon, & \text{если } J^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } J^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

Если $J_\pi(x) = J^*(x)$, то π — оптимальная стратегия в состоянии x . Если стратегия π ϵ -оптимальна и оптимальна в любом состоянии $x \in S$, то говорят, что она является соответственно ϵ -оптимальной или оптимальной стратегией.

Опираясь на предложения 7.45 и 7.46, легко установить, что для любой стратегии π функция $J_\pi(x)$ универсально измерима по x . Действитель-

*) Изменение порядка интегрирования и суммирования в случаях (P) и (N) законно в силу теоремы о монотонной сходимости, а в случае (D) — теоремы об ограниченной сходимости.

но, если $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ и $\pi^k = (\mu_0, \dots, \mu_{k-1})$, то функция $J_k, \pi^k(x)$, определенная равенством (5) из главы 8, универсально измерима по x , и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k, \pi^k(x) = J_\pi(x) \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Если стратегия π марковская, то соотношение (3) может быть следующим образом переписано в терминах операторов T_{μ_k} из определения 8.4:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} \cdots T_{\mu_{k-1}})(J_0)(x) = J_\pi(x) \quad \forall x \in S. \quad (4)$$

В этом виде оно является аналогом для бесконечного горизонта соотношения, установленного в лемме 8.1. Если π — борелевская стратегия и g — борелевская функция, то функция $J_\pi(x)$ измерима по Борелю по x (предложение 7.29).

В случае (P), однако, возможна ситуация, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k^*(x) \neq J^*(x)$, где $J_k^*(x)$ — оптимальные издержки за k шагов, определенные формулой (6) из главы 8. Приведем пример, подтверждающий это.

Пример 1. Пусть $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $C = \{1, 2, \dots\}$, $U(x) = C$ для любого $x \in S$, $\alpha = 1$,

$$f(x, u) = \begin{cases} u & \text{при } x = 0, \\ x - 1 & \text{при } x \neq 0, \end{cases} \quad g(x, u) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 1, \\ 0 & \text{при } x \neq 1. \end{cases}$$

Эта задача является детерминированной, поэтому нет необходимости в выборе множества W и меры $p(dw|x, u)$. Начиная движение из состояния $x_0 = 0$, система переходит без издержек в некоторое состояние u_0 , где u_0 — целое положительное число. Затем она последовательно проходит состояния $u_0 - 1, u_0 - 2, \dots$, до тех пор, пока не возвращается в 0, и процесс повторяется снова. Единственный переход, который влечет ненулевые издержки, — это переход из состояния 1 в состояние 0. Если горизонт k конечен и u_0 выбрано большим, чем k , то до окончания движения издержек нет, поэтому $J_k^*(0) = 0$. При бесконечном горизонте переход из состояния 1 в состояние 0 будет осуществляться бесконечное число раз, независимо от применяемой стратегии, поэтому $J^*(0) = \infty$.

Для стратегии $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi'$ и меры $p \in P(S)$ обозначим через $q_k(\pi, p)$ проекцию меры $r(\pi, p)$ на множество $S_k C_k$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда справедливо соотношение (7) из главы 8, а если π — марковская стратегия, то также выполняется и соотношение (8). Далее, из формулы (1) получаем равенство

$$J_\pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{S_k C_k} g dq_k(\pi, p_x) \quad \forall x \in S, \quad (5)$$

которое является аналогом для бесконечного горизонта равенства (9) из главы 8. Используя эти факты для рассуждения, повторяющего доказательство предложения 8.1, получим следующий аналогичный результат для случая бесконечного горизонта.

Предложение 9.1. (P) (N) (D) Для любых $x \in S$ и $\pi' \in \Pi'$ существует марковская стратегия π такая, что $J_\pi(x) = J_{\pi'}(x)$.

Следствие 9.1.1. (P) (N) (D) Справедливо соотношение

$$J^*(x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_\pi(x) \quad \forall x \in S,$$

где Π является множеством всех марковских стратегий для модели (SM).

9.2. Детерминированная модель

Определение 9.4. Пусть набор величин $(S, C, U, W, p, f, \alpha, g)$ задает стохастическую модель оптимального управления с бесконечным горизонтом из определения 9.1. Соответствующая *детерминированная модель оптимального управления с бесконечным горизонтом*, обозначаемая (DM), состоит из следующих элементов:

Пространство состояний $P(S)$;

Пространство управлений $P(SC)$;

Ограничение на управления $\bar{U}$. Это — функция на множество $P(S)$ со значениями в множестве непустых подмножеств множества $P(SC)$, которая определяется для любого $p \in P(S)$ равенством

$$\bar{U}(p) = \{q \in P(SC) \mid q(\Gamma) = 1 \text{ и } p \text{ есть проекция } q \text{ на } S\}, \quad (6)$$

где множество Γ определено соотношением (1) из главы (8);

Функция системы $\bar{f}$. Это — функция на множестве $P(SC)$ со значениями в множестве $P(S)$, которая задается равенством

$$\bar{f}(q)(\underline{S}) = \int_{SC} t(\underline{S} \mid x, u) q(d(x, u)) \quad \forall \underline{S} \in B_S, \quad (7)$$

где ядро $t(dx' \mid x, u)$ определено формулой (3) из главы (8);

Коэффициент дисконтирования α ;

Функция издержек за один шаг $\bar{g}$. Это — функция на множестве $P(SC)$ со значениями в множестве R^* , определяемая равенством

$$\bar{g}(q) = \int_{SC} g(x, u) q(d(x, u)). \quad (8)$$

Модель (DM) наследует многие свойства регулярности модели (SM). Пространство состояний $P(S)$ и пространство управлений $P(SC)$ этой модели являются борелевскими пространствами (следствие 7.25.1). Функция системы $\bar{f}$ измерима по Борелю (предложение 7.26 и следствие 7.29.1), а функция издержек за один шаг $\bar{g}$ является полуаналитической снизу (следствие 7.48.1). Далее, в случае (P) для модели (SM) имеем $\bar{g} \geq 0$, в случае (N) имеем $\bar{g} \leq 0$, в случае (D) имеем $0 < \alpha < 1$ и $-b \leq \bar{g} \leq b$.

Определение 9.5. Стратегией в модели (DM) называется последовательность отображений $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$ такая, что при любом k $\bar{\mu}_k$ есть функция $P(S) \rightarrow P(SC)$, и $\bar{\mu}_k(p) \in \bar{U}(p)$ при любом $p \in P(S)$. Множество всех стратегий в модели (DM) будет обозначаться через $\bar{\Pi}$. Мы не налагаем никаких ограничений типа измеримости на эти отображения. Стратегия $\bar{\pi}$ вида $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ называется *стационарной*.

Определение 9.6. При любых мере $p_0 \in P(S)$ и стратегии $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$ в модели (DM) *издержками, соответствующими стратегии $\bar{\pi}$ в состоянии p_0* , называется величина

$$\bar{J}_{\bar{\pi}}(p_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{g}(q_k), \quad (9)$$

где последовательность управлений $\{q_k\}$ определяется рекурсивно посредством уравнения

$$q_k = \bar{\mu}_k(p_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

и уравнения системы

$$p_{k+1} = \bar{f}(q_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Если $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ — стационарная стратегия, то вместо $\bar{J}_{\bar{\pi}}$ будем писать $\bar{J}_{\bar{\mu}}$. *Оптимальные издержки* в состоянии p_0 равны

$$\bar{J}^*(p_0) = \inf_{\bar{\pi} \in \bar{\Pi}} \bar{J}_{\bar{\pi}}(p_0).$$

Понятия ϵ -оптимальной и оптимальной стратегий для модели (DM) не отличаются от тех, что введены в определении 9.3 для модели (SM).

Определение 9.7. Последовательность $(p_0, q_0, q_1, \dots) \in P(S)P(SC)P(SC)\dots$ называется *допустимой* в модели (DM), если $q_0 \in \bar{U}(p_0)$ и $q_{k+1} \in \bar{U}[\bar{f}(q_k)]$, $k = 0, 1, \dots$. Множество всех допустимых последовательностей будем обозначать через Δ .

Допустимые последовательности — это просто последовательности управлений $q_0, q_1, \dots$ вместе с начальным состоянием p_0 , которые могут формироваться с помощью некоторой стратегии модели (DM) посредством уравнений (10) и (11). За исключением p_0 , меры p_k не включаются в последовательность, но могут быть восстановлены как проекции мер q_k на множество S (см. (6)).

Определение 9.8. Пусть дана функция $\bar{J}: P(S) \rightarrow R^*$, и пусть $\bar{\mu}: P(S) \rightarrow P(SC)$ — такое отображение, что $\bar{\mu}(p) \in \bar{U}(p)$ при любой мере $p \in P(S)$.

Оператор $\bar{T}_{\bar{\mu}}$, отображающий $\bar{J}$ в $\bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J}): P(S) \rightarrow R^*$, определяется равенством

$$\bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J})(p) = \bar{g}[\bar{\mu}(p) + \alpha \bar{J}[\bar{f}(\bar{\mu}(p))]] \quad \forall p \in P(S).$$

Оператор $\bar{T}$, отображающий $\bar{J}$ в $\bar{T}(\bar{J}): P(S) \rightarrow R^*$, определяется равенством

$$\bar{T}(\bar{J})(p) = \inf_{q \in \bar{U}(p)} \{ \bar{g}(p) + \alpha \bar{J}[\bar{f}(q)] \} \quad \forall p \in P(S).$$

Так как модель (DM) детерминированная, ее можно исследовать на основе результатов, полученных в части I, главы 4 и 5, или в книге [12], поскольку в детерминированной модели нет необходимости налагать ограничения типа измеримости на стратегии. Операторы $\bar{T}_{\bar{\mu}}$ и $\bar{T}$ из определения 9.8 представляют собой частные случаи операторов, определенных в разделе 2.1. В данном случае $H(p, q, \bar{J}) = \bar{g}(q) + \alpha \bar{J}[\bar{f}(q)]$. При таком выборе H предположение монотонности из раздела 2.1 выполняется. Легко видеть, что издержки, соответствующие стратегии $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots)$, которые задаются формулой (9), имеют вид (ср. раздел. 2.2)

$$\bar{J}_{\bar{\pi}} = \lim_{N \rightarrow \infty} (\bar{T}_{\bar{\mu}_0} \dots \bar{T}_{\bar{\mu}_{N-1}})(\bar{J}_0),$$

где $\bar{J}_0(p) = 0$ при всех $p \in P(S)$. Не представляет труда проверить, что в случае (D) предположение сжимаемости из раздела 4.1 выполняется, если в качестве $\bar{V}$ берется множество ограниченных действительных функций на множестве $P(S)$, m кладется равным единице, а $\rho = \alpha$. В случае (P) выполняются предположения I, I.1 и I.2 из раздела 5.1, а в случае (N) — предположения D, D.1 и D.2 из того же раздела.

9.3. Связь между моделями

Определение 9.9. Пусть $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ — марковская стратегия в модели (SM), и $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots) \in \bar{\Pi}$ — стратегия в модели (DM). Пусть задана мера $p_0 \in P(S)$. Если для всех k выполняется равенство

$$\int \mu_k(\underline{C} | x) p_k(dx) = \bar{\mu}_k(p_k)(\underline{SC}) \quad \forall \underline{S} \in B_S, \quad \underline{C} \in B_C, \quad (12)$$

где мера p_k порождается мерой p_0 и стратегией $\bar{\pi}$ посредством уравнений (10) и (11), то говорят, что стратегии π и $\bar{\pi}$ соответствуют друг другу для меры p_0 . Если стратегии π и $\bar{\pi}$ соответствуют друг другу для любой меры $p \in P(S)$, то говорят, что стратегии π и $\bar{\pi}$ соответствуют друг другу.

Если стратегии π и $\bar{\pi}$ соответствуют друг другу для меры p_0 , то последовательность мер $[q_0(\pi, p_0), q_1(\pi, p_0), \dots]$, порождаемая мерой p_0 и стратегией π посредством уравнения (8) из главы 8, совпадает с последовательностью $(q_0, q_1, \dots)$, порожденной мерой p_0 и стратегией $\bar{\pi}$ посредством уравнений (10) и (11). Если стратегии π и $\bar{\pi}$ соответствуют друг другу, то они порождают одну и ту же последовательность $(q_0, q_1, \dots)$ для любой начальной меры p_0 .

Предложение 9.2. (P)(N)(D) Для любой марковской стратегии $\pi \in \Pi$ существует соответствующая стратегия $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$. Для любых стратегий $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ и меры $p_0 \in P(S)$ существует марковская стратегия $\pi \in \Pi$, соответствующая стратегии $\bar{\pi}$ для меры p_0 .

Доказательство. Если дана стратегия $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$, то для любого k и любой меры $p_k \in P(S)$ существует единственная вероятностная мера $\bar{\mu}_k(p_k)$ на SC , удовлетворяющая равенству (12) (предложение 7.45). Далее,

$$\bar{\mu}_k(p_k)(\Gamma) = \int \mu_k(U(x)|x) p_k(dx) = 1, \quad (13)$$

поэтому стратегия $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \mu_1, \dots)$ принадлежит множеству $\bar{\Pi}$ и соответствует стратегии π . Если даны стратегия $\bar{\pi} = (\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots) \in \bar{\Pi}$ и мера $p_0 \in P(S)$, то обозначим $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ последовательность, порождаемую мерой μ_0 и стратегией $\bar{\pi}$ посредством уравнений (10) и (11). Для любого k выберем борелевское стохастическое ядро $\mu_k(du|x)$, удовлетворяющее равенству (12) для данной меры p_k (следствие 7.27.2). Тогда выполняется соотношение (13), поэтому для почти всех x по мере p_k справедливо

$$\mu_k(U(x)|x) = 1. \quad (14)$$

Изменяя $\mu_k(du|x)$, если необходимо, на множестве p_k -меры нуль, мы можем предполагать, что соотношение (14) выполняется для любого $x \in S$, и удовлетворяется равенство (12). Тогда стратегия $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots) \in \Pi$ соответствует стратегии $\bar{\pi}$ для меры p_0 . $\square$

Предложение 9.3. (P)(N)(D) Пусть даны мера $p \in P(S)$, стратегия $\pi \in \Pi$ и стратегия $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$. Если стратегии π и $\bar{\pi}$ соответствуют друг другу для меры p , то

$$\bar{J}_{\bar{\pi}}(p) = \int J_{\pi}(x) p(dx).$$

Доказательство. Из равенства (7) главы 8, равенств (5), (8), (9) и теорем о монотонном или ограниченном предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\begin{aligned} \int J_{\pi}(x) p(dx) &= \int \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{S_k C_k} g dq_k(\pi, p_x) \right] p(dx) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_S \int_{S_k C_k} g dq_k(\pi, p_x) p(dx) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{S_k C_k} g dq_k(\pi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{g}[q_k(\pi, p)] = \bar{J}_{\bar{\pi}}(p). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 9.3.1. (P)(N)(D) Пусть даны состояние $x \in S$, стратегия $\pi \in \Pi$ и стратегия $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$. Если стратегии π и $\bar{\pi}$ соответствуют друг другу для меры p_x , то $J_{\bar{\pi}}(p_x) = J_{\pi}(x)$.

Следствие 9.3.2. (P)(N)(D) Для любого $x \in S$ справедливо соотношение $J^*(p_x) = J^*(x)$.

Доказательство. Из следствий 9.1.1, 9.3.1 и предложения 9.2 следует, что для любого $x \in S$ выполняется цепочка равенств

$$J^*(p_x) = \inf_{\bar{\pi} \in \bar{\Pi}} J_{\bar{\pi}}(p_x) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{\pi}(x) = J^*(x). \quad \square$$

Следствие 9.3.2 показывает, что функции J^* и $\bar{J}^*$ связаны друг с другом, но довольно слабо, поскольку эта связь распространяется только на значение J^* на множестве $\bar{S} = \{p_x \in P(S) | x \in S\}$. В предложении 9.5 мы усилим эту связь, но для того, чтобы сформулировать это предложение, нам нужно показать, что функция J^* обладает определенной измеримостью. Этому посвящено предложение 9.4, которое мы докажем с помощью следующей леммы.

Лемма 9.1. Множество Δ допустимых последовательностей в модели (DM) является аналитическим подмножеством множества $P(S)P(SC)P(SC) \dots$

Доказательство. Множество Δ равно $A_0 \cap [\bigcap_{k=0}^{\infty} B_k]$, где

$$A_0 = \{p_0, q_0, q_1, \dots | q_0 \in \bar{U}(p_0)\},$$

$$B_k = \{p_0, q_0, q_1, \dots | q_{k+1} \in \bar{U}(\bar{f}(q_k))\}.$$

В силу следствия 7.35.2 достаточно показать, что множества A_0 и B_k , $k = 0, 1, \dots$, — аналитические. Согласно предложению 7.38 для этого достаточно убедиться, что множества

$$A = \{p_1, q_1 \in P(S)P(SC) | q_1 \in \bar{U}(p_1)\},$$

$$B = \{q_0, q_1 \in P(SC)P(SC) | q_1 \in \bar{U}(\bar{f}(q_0))\}$$

являются аналитическими. Пусть $P(\Gamma) = \{q \in P(SC) | q(\Gamma) = 1\}$, где множество Γ задается формулой (1) из главы 8. Тогда множество $P(\Gamma)$ является аналитическим (предложение 7.43). Из равенства (6) следует, что множество A представляет собой пересечение аналитического множества $P(S)P(\Gamma)$ (предложение 7.38) с графиком функции $\sigma: P(SC) \rightarrow P(S)$, которая отображает меру q в ее проекцию на S . Легко проверить, что функция σ непрерывна (предложение 7.21 (а) и (б)), поэтому множество $G(\sigma)$ является борелевским (следствие 7.14.1). Следовательно, множество A является аналитическим. Множество B представляет собой прообраз множества A при измеримом по Борелю отображении $(q_0, q_1) \rightarrow [\bar{f}(q_0), q_1]$, и поэтому также является аналитическим (предложение 7.40). $\square$

Предложение 9.4. (P)(N)(D) Функция $J^*: P(S) \rightarrow R^*$ является полуаналитической снизу.

Доказательство. Определим функцию $G: \Delta \rightarrow R^*$ формулой

$$G(p_0, q_0, q_1, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{g}(q_k), \quad (15)$$

где Δ — это множество допустимых последовательностей (определение 9.7). Тогда функция G полуаналитическая снизу в силу леммы 7.30 (2), (4) и леммы 9.1. По определению функции J^* и множества Δ имеем

$$J^*(p_0) = \inf_{(q_0, q_1, \dots) \in \Delta_{p_0}} G(p_0, q_0, q_1, \dots) \quad \forall p_0 \in P(S), \quad (16)$$

поэтому функция $\bar{J}^*$ является полуаналитической снизу в силу предложения 7.47. $\square$

Следствие 9.4.1. (P)(N)(D) Функция $J^*: S \rightarrow R^*$ является полуаналитической снизу.

Доказательство. В силу следствия 9.3.2 $J^*(x) = \bar{J}^*[\delta(x)]$ для $x \in S$, где $\delta(x) = p_x$ есть гомеоморфизм, определенный в следствии 7.21.1. Применив лемму 7.30 (3) и предложение 9.4, получим, что функция J^* полуаналитическая снизу. $\square$

Лемма 9.2. Для любых меры $p \in P(S)$ и числа $\epsilon > 0$ существует стратегия $\bar{\pi}$ в модели (DM) такая, что выполняются неравенства

$$(P)(D) \quad \bar{J}_{\bar{\pi}}(p) \leq \int J^*(x)p(dx) + \epsilon,$$

$$(N) \quad \bar{J}_{\bar{\pi}}(p) \leq \begin{cases} \int J^*(x)p(dx) + \epsilon, & \text{если } \int J^*(x)p(dx) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } \int J^*(x)p(dx) = -\infty. \end{cases}$$

Доказательство. Из следствия 9.4.1 вытекает, что интеграл $\int J^*(x)p(dx)$ вполне определен. Пусть даны мера $p \in P(S)$ и число $\epsilon > 0$. Пусть функция $G: \Delta \rightarrow R^*$ определена формулой (15). Предложение 7.50 гарантирует, что в случаях (P) и (D) существует универсально измеримый селектор $\varphi: P(S) \rightarrow P(SC)P(SC) \dots$ такой, что $(p, \varphi(p)) \in \Delta$ для любой меры $p \in P(S)$ и выполняется неравенство

$$G[p, \varphi(p)] \leq \bar{J}^*(p) + \epsilon \quad \forall p \in P(S).$$

Пусть отображение $\sigma: S \rightarrow P(SC)P(SC)$ определено равенством $\sigma(x) = \varphi(p_x)$. Тогда функция σ универсально измерима (предложение 7.44) и выполняется неравенство

$$G[p_x, \sigma(x)] \leq J^*(x) + \epsilon \quad \forall x \in S. \quad (17)$$

В случае (N) существует универсально измеримая функция $\sigma: S \rightarrow P(SC)P(SC) \dots$ такая, что $(p_x, \sigma(x)) \in \Delta$ и

$$G[p_x, \sigma(x)] \leq \begin{cases} J^*(x) + \epsilon, & \text{если } J^*(x) > -\infty, \\ -(1 + \epsilon^2)/\epsilon p_\infty(J^*), & \text{если } J^*(x) = -\infty, \end{cases} \quad (18)$$

для любого $x \in S$, где $p_\infty(J^*) = p(\{x | J^*(x) = -\infty\})$ при $p(\{x | J^*(x) = -\infty\}) > 0$, и $p_\infty(J^*) = 1$ в противном случае.

Введем обозначение $\sigma(x) = [q_0(d(x_0, u_0)|x), q_1(d(x_1, u_1)|x), \dots]$. Любая мера $q_k(d(x_k, u_k)|x)$ представляет собой универсально измеримое стохастическое ядро на множестве $S_k C_k$ при условии S . Более того,

$$q_0(d(x_0, u_0)|x) \in \bar{U}(p_x) \quad \forall x \in S$$

и для $k = 0, 1, \dots$

$$q_{k+1}(d(x_{k+1}, u_{k+1})|x) \in \bar{U}(\bar{f}[q_k(d(x_k, u_k)|x)]) \quad \forall x \in S.$$

Для $k = 0, 1, \dots$ определим меру $\bar{q}_k \in P(SC)$ равенством

$$\bar{q}_k(B) = \int q_k(B|x)p(dx) \quad \forall B \in B_{SC}.$$

Тогда $\bar{q}_k(\Gamma) = 1$, $k = 0, 1, \dots$. Покажем, что $(p, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots) \in \Delta$. Так как проекция меры $q_0(d(x_0, u_0)|x)$ на множество S_0 равна p_x , имеем

$$\bar{q}_0(\underline{S}_0 C_0) = \int_S q_0(\underline{S}_0 C_0 | x) p(dx) =$$

$$= \int_S \chi_{\underline{S}_0}(x) p(dx) = p(\underline{S}_0) \quad \forall \underline{S}_0 \in B_S,$$

поэтому $\bar{q}_0 \in \bar{U}(p)$. Для $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$\begin{aligned}\bar{q}_{k+1}(\underline{S}_{k+1} C_{k+1}) &= \int_S q_{k+1}(\underline{S}_{k+1} C_{k+1} | x) p(dx) = \\ &= \int_S \int_{S_k C_k} t(\underline{S}_{k+1} | x_k, u_k) q_k(d(x_k, u_k) | x) p(dx) = \\ &= \int_{S_k C_k} t(\underline{S}_{k+1} | x_k, u_k) \bar{q}_k(d(x_k, u_k)) \quad \forall \underline{S}_{k+1} \in B_S.\end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{q}_{k+1} \in \bar{U}[\bar{F}(\bar{q}_k)]$ ($p, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots$) $\in \Delta$.

Пусть $\bar{\pi}$ — произвольная стратегия в модели (DM), порождающая допустимую последовательность $(p, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots)$. Тогда в случаях (P) и (D) из неравенства (17) и теорем о монотонном или ограниченном предельном переходе под знаком интеграла следует

$$\begin{aligned}\bar{J}_{\bar{\pi}}(p) &= G(p, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{S_k C_k} g(x_k, u_k) \bar{q}_k(d(x_k, u_k)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_S \int_{S_k C_k} g(x_k, u_k) q_k(d(x_k, u_k) | x) p(dx) = \\ &= \int_S \left[\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{S_k C_k} g(x_k, u_k) q_k(d(x_k, u_k) | x) \right] p(dx) = \\ &= \int_S G[p_x, \sigma(x)] p(dx) \leq \int_S J^*(x) p(dx) + \epsilon.\end{aligned}$$

В случае (N) из теоремы о монотонном предельном переходе имеем

$$\bar{J}_{\bar{\pi}}(p) = \int_S G[p_x, \sigma(x)] p(dx). \quad (19)$$

Если $p(\{x | J^*(x) = -\infty\}) = 0$, то из соотношений (18) и (19) следует, что

$$\bar{J}_{\bar{\pi}}(p) \leq \int_S J^*(x) p(dx) + \epsilon,$$

где обе части могут равняться $-\infty$. Если $p(\{x | J^*(x) = -\infty\}) > 0$, то $\int_S J^*(x) p(dx) = -\infty$ и из соотношений (18) и (19) получим

$$\begin{aligned}\bar{J}_{\bar{\pi}}(p) &\leq \int_{\{x | J^*(x) > -\infty\}} [J^*(x) + \epsilon] p(dx) - (1 + \epsilon^2)/\epsilon \leq \\ &\leq \epsilon - (1 + \epsilon^2)/\epsilon = -1/\epsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Предложение 9.5. (P)(N)(D) Для любой меры $p \in P(S)$ выполняется равенство

$$J^*(p) = \int_S J^*(x) p(dx).$$

Доказательство. Из леммы 9.2 следует, что

$$\bar{J}_{\bar{\pi}}(p) \leq \int_S J^*(x) p(dx) \quad \forall p \in P(S).$$

Для получения противоположного неравенства предположим, что мера p принадлежит множеству $P(S)$ и $\bar{\pi}$ — стратегия в модели (DM). Существует стратегия $\pi \in \Pi$, соответствующая стратегии $\bar{\pi}$ для меры p (предложение 9.2), и в силу предложения 9.3 выполняется неравенство

$$\bar{J}_{\bar{\pi}}(p) = \int_S J_{\pi}(x) p(dx) \geq \int_S J^*(x) p(dx).$$

Взяв инфимум от левой части по $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$, получим требуемый результат. $\square$

Предложения 9.3 и 9.5 являются ключевыми в установлении связи между моделями (SM) и (DM). В качестве примера их применения рассмотрим такое следствие.

Следствие 9.5.1. (P)(N)(D) *Предположим, что $\pi \in \Pi$ и $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ — соответствующие друг другу стратегии в моделях (SM) и (DM). Стратегия π оптимальна тогда и только тогда, когда оптимальна стратегия $\bar{\pi}$.*

Доказательство. Если стратегия π оптимальна, то

$$\bar{J}_{\pi}(p) = \int J_{\pi}(x)p(dx) = \int J^*(x)p(dx) = \bar{J}^*(p) \quad \forall p \in P(S).$$

Если оптимальна стратегия $\bar{\pi}$, то

$$J_{\pi}(x) = \bar{J}_{\bar{\pi}}(p_x) = \bar{J}^*(p_x) = J^*(x) \quad \forall x \in S. \quad \square$$

Очередное следствие представляет собой технический результат, который понадобится в главе 10.

Следствие 9.5.2. (P)(N)(D) *Для любой меры $p \in P(S)$ выполняется равенство*

$$\int J^*(x)p(dx) = \inf_{\pi \in \Pi} \int J_{\pi}(x)p(dx).$$

Доказательство. В силу предложений 9.2 и 9.3 имеем

$$\bar{J}^*(p) = \inf_{\pi \in \Pi} \int J_{\pi}(x)p(dx) \quad \forall p \in P(S).$$

Остается применить предложение 9.5. $\square$

Теперь займемся исследованием связей между операторами T_{μ} и $\bar{T}_{\mu}$ и между операторами T и $\bar{T}$. Первое предложение есть прямое следствие определений, и мы представляем читателю проверить его справедливость.

Предложение 9.6. (P)(N)(D) *Пусть функция $J: S \rightarrow R^*$ универсально измерима и удовлетворяет одному из условий $J \geq 0$, или $J \leq 0$, или $-c \leq J \leq c$, $c < \infty$ в зависимости от того, какой из случаев (P), (N) или (D) имеет место. Пусть функция $\bar{J}: P(S) \rightarrow R^*$ определена соотношением*

$$\bar{J}(p) = \int J(x)p(dx) \quad \forall p \in P(S),$$

и предположим, что отображение $\bar{\mu}: P(S) \rightarrow P(SC)$ имеет вид

$$\bar{\mu}(p)(\underline{S}\underline{C}) = \int \mu(\underline{C}|x)p(dx) \quad \forall \underline{S} \in B_S, \underline{C} \in B_{\underline{C}}$$

для некоторого отображения $\mu \in U(C|S)^$. Тогда $\bar{\mu}(p) \in \bar{U}(p)$ для любой меры $p \in P(S)$ и выполняется равенство*

$$\bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J})(p) = \int T_{\mu}(J)(x)p(dx) \quad \forall p \in P(S).$$

Предложение 9.7. (P)(N)(D) *Пусть функция $J: S \rightarrow R^*$ полуаналитическая снизу и удовлетворяет одному из условий $J \geq 0$, или $J \leq 0$, или $-c \leq J \leq c$, $c < \infty$, в зависимости от того, какой из случаев (P), (N) или (D) имеет место. Пусть функция $\bar{J}: P(S) \rightarrow R^*$ определена соотношением*

$$\bar{J}(p) = \int J(x)p(dx) \quad \forall p \in P(S). \quad (20)$$

Тогда выполняется равенство

$$\bar{T}(\bar{J})(p) = \int T(J)(x)p(dx) \quad \forall p \in P(S).$$

*) Множество $U(C|S)$, определенное в разделе 8.2, представляет собой совокупность универсально измеримых стохастических ядер μ на множестве S при условии S , которые для любого $x \in S$ удовлетворяют равенству $\mu(U(x)|x) = 1$.

Доказательство. Для мер $p \in P(S)$ и $q \in \bar{U}(p)$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{g}(q) + \alpha \bar{J}[\bar{f}(q)] &= \int_{SC} [g(x, u) + \alpha \int_S J(x') t(dx' | x, u)] q(d(x, u)) \geq \\ &\geq \int_S T(U)(x) p(dx), \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\bar{T}(\bar{J})(p) \geq \int T(U)(x) p(dx).$$

Из леммы 8.2 следует, что для любого числа $\epsilon > 0$ существует такая мера $\mu \in U(C|S)$, что

$$\int_C [g(x, u) + \alpha \int_S J(x') t(dx' | x, u)] \mu(du | x) \leq T(U)(x) + \epsilon.$$

Пусть мера $q \in \bar{U}(p)$ такова, что

$$q(\underline{SC}) = \int \mu(\underline{C} | x) p(dx) \quad \forall \underline{S} \in B_S, \quad \underline{C} \in B_C.$$

Тогда выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{J})(p) &\leq \int_{SC} [g(x, u) + \alpha \int_S J(x') t(dx' | x, u)] q(d(x, u)) = \\ &= \int_S \int_C [g(x, u) + \alpha \int_S J(x') t(dx' | x, u)] \mu(du | x) p(dx) \leq \int T(U)(x) p(dx) + \epsilon, \end{aligned}$$

где выражение $\int T(U)(x) p(dx) + \epsilon$ может принимать значение $-\infty$. Следовательно, выполняется неравенство

$$\bar{T}(\bar{J})(p) \leq \int T(U)(x) p(dx). \quad \square$$

9.4. Уравнение оптимальности — характеристика оптимальных стратегий

Как отмечено вслед за определением 9.8, модель (DM) представляет собой частный случай модели, рассмотренной в части I и [12]^{*}. Это позволяет нам легко получать результаты для обеих моделей (SM) и (DM). Наиболее ярким примером этого является следующее предложение.

Предложение 9.8. (P)(N)(D) *Справедливы равенства*

$$\bar{J}^* = \bar{T}(\bar{J}^*), \quad (21)$$

$$J^* = T(U^*). \quad (22)$$

Доказательство. Уравнение оптимальности (21) для модели (DM) получается из предложений 4.2 (а), 5.2 и 5.3 или из [12, глава 6, предложение 2 и глава 7, предложение 1]. Тогда для любого $x \in S$ в силу предложений 9.5 и 9.7 имеем

$$J^*(x) = \bar{J}^*(p_x) = \bar{T}(\bar{J}^*)(p_x) = T(U^*)(x),$$

поэтому выполняется также и равенство (22). $\square$

Предложение 9.9. (P) (N) (D) *Если $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ — стационарная стратегия в модели (DM), то $\bar{J}_{\bar{\mu}} = \bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J}_{\bar{\mu}})$. Если $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ — стационарная стратегия в модели (SM), то $J_{\mu} = T_{\mu}(J_{\mu})$.*

^{*} В то время как мы допускаем, что функция $\bar{g}$ является действительной в расширенном смысле, в главе 7 из [12] предполагается, что функция издержек за один шаг является действительной функцией. Это более ограничительное предположение не существенно для любых результатов из [12], на которые мы ссылаемся.

Доказательство. Для модели (DM) этот результат следует из предложения 4.2 (б), следствия 5.3.2 или из [12, глава 6, следствие 2.1 и глава 7, следствие 1.1]. Пусть $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ — стационарная стратегия модели (SM) и пусть $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ — стратегия в модели (DM), соответствующая стратегии π . Тогда для любого $x \in S$ в силу предложений 9.3 и 9.6 выполняются равенства

$$J_{\mu}(x) = \bar{J}_{\bar{\mu}}(p_x) = \bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J}_{\bar{\mu}})(p_x) = T_{\mu}(J_{\mu})(x). \quad \square$$

Заметим, что предложение 9.9 для модели (SM) не может быть выведено из предложения 9.8, если рассматривать модифицированную модель (SM) с ограничениями на управления вида

$$U_{\mu}(x) = \{\mu(x)\} \quad \forall x \in S, \quad (23)$$

как это было сделано при доказательстве следствия 5.2.1. Даже если селектор μ является нерандомизированным и соотношение (23) имеет смысл, множество $\Gamma_{\mu} = \{(x, u) \mid x \in S, u \in U_{\mu}(x)\}$ может не быть аналитическим, поэтому U_{μ} не является допустимым множеством ограничений на управления.

Уравнения оптимальности являются необходимыми условиями для оптимальных функций издержек, но за исключением случая (D) они никак не являются достаточными. Справедливы следующие частные результаты о достаточных условиях.

Предложение 9.10.

(P) Если для функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [0, \infty]$ имеем $\bar{J} \geq \bar{T}(\bar{J})$, то $\bar{J} \geq \bar{J}^*$; если функция $J: S \rightarrow [0, \infty]$ полуаналитична снизу и $J \geq T(J)$, то $J \geq J^*$.

(N) если для функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-\infty, 0]$ имеем $\bar{J} \leq \bar{T}(\bar{J})$, то $\bar{J} \leq \bar{J}^*$; если функция $J: S \rightarrow [-\infty, 0]$ полуаналитична снизу и $J \leq T(J)$, то $J \leq J^*$;

(D) если для функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, имеем $\bar{J} = \bar{T}(\bar{J})$, то $\bar{J} = \bar{J}^*$; если функция $J: S \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, полуаналитична снизу и $J = T(J)$, то $J = J^*$.

Доказательство. Сначала рассмотрим утверждения для модели (DM). Результат, относящийся к случаю (P), следует из предложения 5.2, результат для случая (N) следует из предложения 5.3, а для случая (D) — из предложения 4.2 (а). Результаты для модели (DM) следуют из предложения 2 и незначительных изменений доказательства предложения 9 из [12, глава 6].

Теперь мы установим справедливость предложения для модели (SM) в случае (P). Аналогично нужно действовать и в случаях (N) и (D). Если дана полуаналитическая снизу функция $J: S \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющая неравенству $J \geq T(J)$, то определим функцию $\bar{J}: P(S) \rightarrow [0, \infty]$ соотношением (20). Тогда в силу предложения 9.7 получим

$$\bar{J}(p) = \int J(x)p(dx) \geq \int T(J)(x)p(dx) = \bar{T}(\bar{J})(p) \quad \forall p \in P(S).$$

Опираясь на результат для модели (DM), выводим, что $\bar{J} \geq \bar{J}^*$. В частности

$$J(x) = \bar{J}(p_x) \geq \bar{J}^*(p_x) = J^*(x) \quad \forall x \in S. \quad \square$$

Предложение 9.11. Пусть $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ и $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ являются стационарными стратегиями в моделях (DM) и (SM) соответственно:

(P) Если для функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [0, \infty]$ имеем $\bar{J} \geq \bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J})$, то $\bar{J} \geq \bar{J}_{\bar{\mu}}^*$; если функция $J: S \rightarrow [0, \infty]$ универсально измерима и $J \geq T_{\mu}(J)$, то $J \geq J_{\mu}^*$.

(N) Если для функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-\infty, 0]$ имеем $\bar{J} \leq \bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J})$, то $\bar{J} \leq \bar{J}_{\bar{\mu}}^*$; если функция $J: S \rightarrow [-\infty, 0]$ универсально измерима и $J \leq T_{\mu}(J)$, то $J \leq J_{\mu}^*$.

(D) Если для функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, имеем $\bar{J} = \bar{T}_{\mu}(\bar{J})$, то $\bar{J} = \bar{J}_{\mu}$; если функция $J: S \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, универсально измерима и $J = T_{\mu}(J)$, то $J = J_{\mu}$.

Доказательство. Результаты для модели (DM) следуют из предложения 4.2 (6) и следствий 5.2.1 и 5.3.2 или из результатов работы [12, следствие 2.1 и тривиальные модификации следствия 9.1 главы 6]. Результаты для модели (SM) следуют из результатов для модели (DM) и предложения 9.6 так же, как при доказательстве предложения 9.10. $\square$

Из предложения 9.11 следует, что в случае (P) функция представляет собой наименьшее неотрицательное универсально измеримое решение функционального уравнения $J = T_{\mu}(J)$. В случае (D) функция J_{μ} представляет собой единственное ограниченное универсально измеримое решение этого уравнения. Это дает нам простое необходимое и достаточное условие оптимальности стационарной стратегии в случаях (P) и (D).

Предложение 9.12. (P) (D) Пусть $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ и $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ являются стационарными стратегиями для моделей (DM) и (SM) соответственно. Стратегия π оптимальна тогда и только тогда, когда $\bar{J}^* = \bar{T}_{\mu}(\bar{J}^*)$. Стратегия π оптимальна тогда и только тогда, когда $J^* = T_{\mu}(J^*)$.

Доказательство. Если стратегия $\bar{\pi}$ оптимальна, то $\bar{J}_{\mu} = \bar{J}^*$. В силу предложения 9.9 $\bar{J}^* = \bar{T}_{\mu}(\bar{J}^*)$. Обратно, если $\bar{J}^* = \bar{T}_{\mu}(\bar{J}^*)$, то в силу предложения 9.11 выполняется неравенство $\bar{J}^* \geq \bar{J}_{\mu}$ и стратегия $\bar{\pi}$ оптимальна. Для модели (SM) доказательство следует из тех же предложений, но для модели (SM).

Следствие 9.12.1. (P) (D) В модели (SM) оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия существует тогда и только тогда, когда инфимум

$$\inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + \alpha \int J^*(x') t(dx' | x, u)\} \quad (24)$$

достигается для любого $x \in S$.

Доказательство. Если инфимум в выражении (24) достигается для любого $x \in S$, то в силу предложения 7.50 существует универсально измеримый селектор $\mu: S \rightarrow C$, график которого принадлежит множеству Γ и для которого

$$\begin{aligned} g[x, \mu(x)] + \alpha \int J^*(x') t(dx' | x, \mu(x)) = \\ = \inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + \alpha \int J^*(x') t(dx' | x, u)\} \quad \forall x \in S. \end{aligned}$$

Тогда в силу предложения 9.8 $T_{\mu}(J^*) = T(J^*) = J^*$, поэтому, как следует из предложения 9.12 стратегия $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ является оптимальной.

Если $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ — оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия в модели (SM), то в силу предложений 9.8 и 9.9 выполняются равенства

$$T_{\mu}(J^*) = T_{\mu}(J_{\mu}) = J_{\mu} = J^* = T(J^*),$$

поэтому селектор $\mu(x)$ доставляет инфимум в выражении (24) для любого $x \in S$. $\square$

В предложении 9.19 мы покажем, что в случае (P) или (D) из существования какой-либо оптимальной стратегии следует существование нерандомизированной стационарной оптимальной стратегии. Это означает, что

следствие 9.12.1 фактически дает необходимое и достаточное условие существования какой-либо оптимальной стратегии.

В случае (N) мы можем воспользоваться предложением 9.10 для получения необходимого и достаточного условия оптимальности данной стационарной стратегии. Это условие, однако, не столь полезно, как условие предложения 9.12, так как оно не может использоваться для построения стационарной оптимальной стратегии, подобного содержащемуся в следствии 9.12.1.

Предложение 9.13. (N) (D) Пусть $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ и $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ — стационарные стратегии для моделей (DM) и (SM) соответственно. Стратегия $\bar{\pi}$ оптимальна тогда и только тогда, когда $\bar{J}_{\bar{\mu}} = \bar{T}(\bar{J}_{\bar{\mu}})$. Стратегия π оптимальна тогда и только тогда, когда $J_{\mu} = T(J_{\mu})$.

Доказательство. Если стратегия $\bar{\pi}$ оптимальна, то $\bar{J}_{\bar{\mu}} = \bar{J}^*$. В силу предложения 9.8 имеем $\bar{J}_{\bar{\mu}} = \bar{J}^* = \bar{T}(\bar{J}^*) = \bar{T}(\bar{J}_{\bar{\mu}})$. Обратно, если $\bar{J}_{\bar{\mu}} = \bar{T}(\bar{J}_{\bar{\mu}})$, то из предложения 9.10 следует, что $\bar{J}_{\bar{\mu}} \leq \bar{J}^*$, и стратегия $\bar{\pi}$ оптимальна.

Если стратегия π оптимальна, то в силу (SM)-части предложения 9.8 имеем $J_{\mu} = T(J_{\mu})$. Доказательство обратного утверждения представляет собой более трудную задачу, так как (SM)-часть предложения 9.10 не может быть получена без знания того, что функция J_{μ} полуаналитична снизу. Пусть $\bar{\pi} = (\bar{\mu}, \bar{\mu}, \dots)$ — стратегия в модели (DM), соответствующая стратегии $\pi = (\mu, \mu, \dots)$, так что $\bar{J}_{\bar{\mu}}(p) = \int J_{\mu}(x)p(dx)$ для любого $p \in P(S)$.

Тогда для фиксированных мер $p \in P(S)$ и $q \in \bar{U}(p)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \bar{g}(q) + \alpha \bar{J}_{\bar{\mu}}[\bar{f}(q)] &= \int_{S^C} [g(x, u) + \alpha \int_S J_{\mu}(x')t(dx' | x, u)] q(dx, u) \geq \\ &\geq \int \inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + \alpha \int_S J_{\mu}(x')t(dx' | x, u)\} p(dx), \end{aligned}$$

если только подынтегральная функция

$$T(J_{\mu})(x) = \inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + \alpha \int_S J_{\mu}(x')t(dx' | x, u)\}$$

универсально измерима по x . Но, по предположению, $T(J_{\mu}) = J_{\mu}$, а J_{μ} универсально измерима, поэтому

$$\bar{g}(q) + \alpha \bar{J}_{\bar{\mu}}[\bar{f}(q)] \geq \int J_{\mu}(x)p(dx) = \bar{J}_{\bar{\mu}}(p).$$

Взяв инфимум от левой части по $q \in \bar{U}(p)$ и используя предложение 9.9, видим, что $\bar{T}(\bar{J}_{\bar{\mu}}) \geq \bar{J}_{\bar{\mu}} = \bar{T}_{\bar{\mu}}(\bar{J}_{\bar{\mu}})$. Обратное неравенство выполняется всегда, и в силу результата, уже доказанного для модели (DM), стратегия $\bar{\pi}$ является оптимальной. Оптимальность стратегии π вытекает из следствия 9.5.1. $\square$

9.5. Сходимость алгоритма динамического программирования — существование стационарных оптимальных стратегий

Определение 9.10. Алгоритм динамического программирования для моделей (DM) и (SM) определяются рекуррентно следующим образом:

$$\bar{J}_0(p) = 0, \quad \forall p \in P(S),$$

$$\bar{J}_{k+1}(p) = \bar{T}(\bar{J}_k)(p) \quad \forall p \in P(S), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$J_0(x) = 0 \quad \forall x \in S,$$

$$J_{k+1}(x) = T(J_k)(x) \quad \forall x \in S, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из предложения 8.2 нам известно, что этот алгоритм дает оптимальные функции издержек за k шагов J_k^* . Для простоты обозначений будем здесь опускать значок "*". Здесь мы имеем дело со случаем бесконечного горизонта, и нас интересует, сходится ли при $k \rightarrow \infty$ последовательность функций J_k к функции J^* .

В случае (P) имеем $\bar{J}_0 \leq \bar{J}_1$, и поэтому $\bar{J}_1 = \bar{T}(\bar{J}_0) \leq \bar{T}(\bar{J}_1) = \bar{J}_2$. Продолжая, видим, что $\bar{J}_k$ представляет собой возрастающую последовательность функций, и поэтому предел $\bar{J}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{J}_k$ существует и принимает значения из интервала $[0, +\infty)$.

В случае (N) $\bar{J}_k$ представляет собой убывающую последовательность функций и предел $\bar{J}_\infty$ существует и принимает значения из интервала $[-\infty, 0]$.

В случае (D) имеем

$$\bar{J}_0 \leq b + \bar{T}(\bar{J}_0),$$

$$0 \leq b + \bar{T}(\bar{J}_0) \leq b + \bar{T}[b + \bar{T}(\bar{J}_0)] = (1 + \alpha)b + \bar{T}^2(\bar{J}_0),$$

$$0 \leq b + \bar{T}[b + \bar{T}(\bar{J}_0)] = (1 + \alpha)b + \bar{T}^2(\bar{J}_0) \leq$$

$$\leq b + \bar{T}[(1 + \alpha)b + \bar{T}^2(\bar{J}_0)] = (1 + \alpha + \alpha^2)b + \bar{T}^3(\bar{J}_0),$$

и вообще

$$0 \leq b \sum_{j=0}^{k-2} \alpha^j + \bar{T}^{k-1}(\bar{J}_0) \leq b \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j + \bar{T}^k(\bar{J}_0).$$

Мы видим, что при $k \rightarrow \infty$ величина $b \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j + \bar{T}^k(\bar{J}_0)$, возрастая стремится

к некоторому пределу. Но $b \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j = b/(1 - \alpha)$, поэтому предел $\bar{J}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{T}^k(\bar{J}_0)$ существует и удовлетворяет неравенству $-b/(1 - \alpha) \leq \bar{J}_\infty$. Аналогично можно установить, что $\bar{J}_\infty \leq b/(1 - \alpha)$.

Теперь, для функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, имеем

$$\bar{J}_0 \leq \bar{J} + c, \quad \bar{T}(\bar{J}_0) \leq \bar{T}(\bar{J} + c) = \alpha c + \bar{T}(\bar{J}),$$

и вообще $\bar{T}^k(\bar{J}_0) \leq \alpha^k c + \bar{T}^k(\bar{J})$. Отсюда следует, что

$$\bar{J}_\infty \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \bar{T}^k(\bar{J}),$$

и аналогичные выкладки, начинающиеся с неравенства $\bar{J} - c \leq \bar{J}_0$, показывают, что $\limsup_{k \rightarrow \infty} \bar{T}^k(\bar{J}) \leq \bar{J}_\infty$. Следовательно, в случае (D) для любой ограниченной действительной функции $\bar{J}$ на множестве $P(S)$ имеем $\bar{J}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{T}^k(\bar{J})$.

Те же рассуждения могут быть использованы для установления существования предела $J_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k$. В случае (P) имеем $J_\infty: S \rightarrow [0, +\infty)$; в случае (N) имеем $J_\infty: S \rightarrow [-\infty, 0]$, наконец в случае (D) функция $J_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{T}^k(J)$ принимает значения из интервала $[-b/(1 - \alpha), b/(1 - \alpha)]$ (подразумевается, что функция $J: S \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, является полуаналитической снизу функцией). Заметим, что в силу леммы 7.30 (2) в каждом случае функция J_∞ является полуаналитической снизу.

Лемма 9.3. (P) (N) (D) Для любой меры $p \in P(S)$ выполняется соотношение

$$\bar{J}_k(p) = \int J_k(x)p(dx), \quad k = 0, 1, \dots, k = \infty.$$

Доказательство. Для $k = 0, 1, \dots$ справедливость утверждения леммы устанавливается по индукции из предложения 9.7. Если $k = \infty$, то результат в случаях (P) и (N) следует из теоремы о монотонном предельном переходе под знаком интеграла, а в случае (D) — из теоремы об ограниченном предельном переходе под знаком интеграла.

Предложение 9.14. (N) (D) Имеют место равенства

$$\bar{J}_\infty = \bar{J}^*, \quad (25)$$

$$J_\infty = J^*. \quad (26)$$

Более того, в случае (D) выполнение алгоритма динамического программирования может быть начато с любой функции $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, или с любой полуаналитической снизу функции $J: S \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$; при этом приближения сходятся равномерно, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{p \in P(S)} |\bar{T}^k(\bar{J})(p) - \bar{J}^*(p)| = 0, \quad (27)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} |T^k(J)(x) - J^*(x)| = 0. \quad (28)$$

Доказательство. Для модели (DM) результат следует из предложений 4.2 (в) и 5.7 или из результатов книги [12, глава 6, предложение 3 и глава 7, предложение 4]. В силу леммы 9.3

$$J_k(x) = \bar{J}_k(p_x) \quad \forall x \in S, \quad k = 0, 1, \dots, k = \infty,$$

поэтому из равенства (25) следует (26). В случае (D) для любой полуаналитической снизу функции $J: S \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, определим функцию $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-c, c]$ формулой (20). Теперь равенство (28) следует из равенства (27) и предложений 9.5 и 9.7. $\square$

Случай (D) наиболее удобен для вычислительных процедур. Развита здесь техника может быть применена к предложению 4.6 или к предложению 4 из главы 6 книги [12] для того, чтобы показать справедливость в модели (SM) приведенных там оценок погрешностей. Мы докажем теорему для модели (SM). Аналогичный результат справедлив, конечно, и для модели (DM).

Предложение 9.15. (D) Пусть функция $J: S \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, полуаналитична снизу. Тогда для всех $x \in S$ и $k = 0, 1, \dots$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} T^k(J)(x) + b_k &\leq T^{k+1}(J)(x) + b_{k+1} \leq \\ &\leq J^*(x) \leq T^{k+1}(J)(x) + \bar{b}_{k+1} \leq T^k(J)(x) + \bar{b}_k. \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$b_k = [\alpha/(1-\alpha)] \inf_{x \in S} [T^k(J)(x) - T^{k-1}(J)(x)], \quad (30)$$

$$\bar{b}_k = [\alpha/(1-\alpha)] \sup_{x \in S} [T^k(J)(x) - T^{k-1}(J)(x)]. \quad (31)$$

Доказательство. Для любой полуаналитической снизу функции $J: S \rightarrow [-c, c]$, $c < \infty$, определим функцию $\bar{J}: P(S) \rightarrow [-c, c]$ с помощью соотношения (20). В силу предложения 9.7 имеет место соотношение

ношение

$$\bar{T}^k(\bar{J})(p) = \int T^k(J)(x)p(dx) \quad \forall p \in P(S), \quad k = 0, 1, \dots$$

Следовательно,

$$b_k = [\alpha/(1-\alpha)] \inf_{p \in P(S)} [\bar{T}^k(\bar{J})(p) - \bar{T}^{k-1}(\bar{J})(p)],$$

$$\bar{b}_k = [\alpha/(1-\alpha)] \sup_{p \in P(S)} [\bar{T}^k(\bar{J})(p) - \bar{T}^{k-1}(\bar{J})(p)],$$

где величины b_k и $\bar{b}_k$ определены формулами (30) и (31).

Положив в предложении 4.6 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ или используя доказательство предложения 4 главы 6 из [12], получим, что

$$\begin{aligned} \bar{T}^k(\bar{J})(p) + b_k &\leq \bar{T}^{k+1}(\bar{J})(p) + b_{k+1} \leq \\ &\leq J^*(p) \leq \bar{T}^{k+1}(\bar{J})(p) + \bar{b}_{k+1} \leq \bar{T}^k(\bar{J})(p) + \bar{b}_k. \end{aligned}$$

Полагая здесь $p = p_*$, получим неравенство (29). $\square$

Для модели (SM) невозможно построить алгоритм итерации стратегий аналогично тому, как это было сделано в предложениях 4.8 и 4.9. Одна из трудностей состоит в следующем. Если на k -й итерации мы построили стратегию $(\mu_k, \mu_k, \dots)$, где $\mu_k \in U(C|S)$, то функция J_{μ_k} универсально измержима, но не обязательно является полуаналитической снизу. Нам хотелось бы найти селектор $\mu_{k+1} \in U(C|S)$ такой, чтобы выполнялось неравенство $T_{\mu_{k+1}}(J_{\mu_k}) \leq T(J_{\mu_k}) + \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — некоторое наперед заданное малое число, но предложение 7.50 к этому случаю неприменимо.

Обратимся теперь к вопросу о сходимости алгоритма динамического программирования в случае (P). Без дополнительных предположений мы можем получить только следующий результат.

Предложение 9.16. (P) *Имеют место неравенства*

$$\bar{J}_\infty \leq \bar{J}^*, \quad (32)$$

$$J_\infty \leq J^*. \quad (33)$$

Более того, следующие утверждения эквивалентны:

(а) $\bar{J}_\infty = \bar{T}(\bar{J}_\infty)$,

(б) $\bar{J}_\infty = \bar{J}^*$,

(в) $J_\infty = T(J_\infty)$,

(г) $J_\infty = J^*$.

Доказательство. Неравенство (32) очевидно, и в силу предложения 9.10 из него следует эквивалентность утверждений (а) и (б). Из леммы 9.3, предложения 9.5 и неравенства (32) следует неравенство (33). Условия (а) и (в) эквивалентны в силу леммы 9.3 и предложения 9.5.

В примере 1 мы имели $J_\infty(0) = 0$ и $J^*(0) = \infty$, поэтому неравенства (32) и (33) могут быть строгими. Приведем теперь пример, в котором не только J_∞ отличается от J^* , но J_∞ является борелевской функцией, а J^* — нет.

Пример 2 (Блекуэлл). Пусть Σ представляет собой множество конечных последовательностей положительных чисел, а H — множество функций h на Σ со значениями 0 или 1. Тогда множество H может рассматриваться как счетное декартово произведение копий множества $\{0, 1\}$, занумерованных множествами из Σ . Пусть множество $\{0, 1\}$ имеет дискретную топологию, а множество H — топологию произведения, тогда H представляет собой полное сепарабельное метризуемое пространство (предложение 7.4).

Типичным базисным открытым множеством в пространстве H является множество $\{h \in H \mid h(s) = 1 \ \forall s \in \Sigma_1, h(s) = 0 \ \forall s \in \Sigma_2\}$, где Σ_1 и Σ_2 — конечные подмножества множества Σ .

Рассмотрим систему Суслина $R: \Sigma \rightarrow B_H$, определенную формулой

$$R(s) = \{h \in H \mid h(s) = 1\} \quad \forall s \in \Sigma.$$

Тогда множество

$$N(R) = \{h \in H \mid \exists (\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \text{ такая, что } h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 1 \ \forall n\}$$

представляет собой аналитическое подмножество пространства H (предложение 7.36). Теперь с помощью приложения Б покажем, что множество $N(R)$ неизмеримо по Борелю. Пусть Y — несчетное борелевское пространство и $Q: \Sigma \rightarrow B_Y$ — система Суслина такая, что множество $N(Q)$ неизмеримо по Борелю (предложение Б.6). Определим функцию $\psi: Y \rightarrow H$, полагая

$$\psi(y)(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in Q(s), \\ 0, & \text{если } y \notin Q(s). \end{cases}$$

Если Σ_1 и Σ_2 — конечные подмножества множества Σ , то множество

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(\{h \in H \mid h(s) = 1 \ \forall s \in \Sigma_1, h(s) = 0 \ \forall s \in \Sigma_2\}) = \\ = \left[\bigcap_{s \in \Sigma_1} Q(s) \right] \cap \left[\bigcap_{s \in \Sigma_2} (Y - Q(s)) \right] \end{aligned}$$

принадлежит B_Y . Совокупность E подмножеств E пространства H , для которых $\psi^{-1}(E) \in B_Y$, представляет собой σ -алгебру, содержащую базу топологии в пространстве H , поэтому в силу замечания, сделанного после определения 7.6, E содержит B_H и функция ψ является борелевской. Для любого $s \in \Sigma$ имеем $Q(s) = \psi^{-1}[R(s)]$, поэтому

$$\begin{aligned} N(Q) &= \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} Q(s) = \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} \psi^{-1}[R(s)] = \\ &= \psi^{-1} \left[\bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} R(s) \right] = \psi^{-1}[N(R)]. \end{aligned}$$

Так как множество $N(Q)$ не измеримо по Борелю, то $N(R)$ также не является борелевским множеством.

Определим модель принятия решений, положив $S = H\Sigma^*$, где $\Sigma^* = \Sigma \cup \{0\}$, $C = \{1, 2, \dots\}$, $U(x) = C$ для любого $x \in S$ и

$$f([h, 0], u) = (h, u),$$

$$f([h, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)], u) = [h, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, u)].$$

Переходы системы из состояния в состояние детерминированы, поэтому не возникает вопрос о выборе пространства W и меры $p(dw \mid x, u)$. Выберем $\alpha = 1$ и положим

$$g([h, 0], u) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(u) = 1, \\ 1, & \text{если } h(u) = 0, \end{cases}$$

$$g([h, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)], u) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, u) = 1, \\ 1, & \text{если } h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, u) = 0. \end{cases}$$

Если система начинает движение из состояния $x_0 = [h, 0]$ и горизонт бесконечен, то положительных издержек можно избежать в том и только в том случае, если существует последовательность $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ такая, что

$h(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 1$ для любого n , т.е. $J^*([h, 0]) = 0$ тогда и только тогда, когда $h \in N(R)$. Следовательно, функция J^* не является борелевской. При конечном горизонте имеем

$$J_{k+1}(x) = T(J_k)(x) = \inf_{u \in C} \{g(x, u) + J_k[f(x, u)]\},$$

и так как множество C счетно, а функции f, g и J_0 измеримы по Борелю, то функция J_k измерима по Борелю для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что функция J_∞ борелевская.

Необходимые и достаточные условия предложения 9.16 трудно проверить на практике. Мы приведем здесь более легко проверяемые условия, достаточные для равенства $J_\infty = J^*$.

Предложение 9.17. (P) (D) *Предположим, что существует неотрицательное целое число $\bar{k}$ такое, что для любых $x \in S$, $\lambda \in R$ и $k \geq \bar{k}$ множество*

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in U(x) \mid g(x, u) + \alpha \int J_k(x')t(dx' \mid x, u) \leq \lambda\} \quad (34)$$

компактно в C . Тогда $\bar{J}_\infty = \bar{J}^$, $J_\infty = J^*$ в модели (SM) существует оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия.*

Доказательство. В случае (P) для любого k имеем $J_k \leq J_\infty$, поэтому $J_{k+1} = T(J_k) \leq T(J_\infty)$, и, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$J_\infty \leq T(J_\infty). \quad (35)$$

Пусть $x \in S$ — такое состояние, что $J_\infty(x) < \infty$. В силу леммы 3.1 для $k \geq \bar{k}$ существует управление $u_k \in U(x)$ такое, что

$$J_{k+1}(x) = g(x, u_k) + \alpha \int J_k(x')t(dx' \mid x, u_k).$$

Так как $J_k \leq J_{k+1} \leq \dots \leq J_\infty$, то отсюда следует, что для $k \geq \bar{k}$

$$\begin{aligned} g(x, u_i) + \alpha \int J_k(x')t(dx' \mid x, u_i) &\leq g(x, u_i) + \\ &+ \alpha \int J_i(x')t(dx' \mid x, u_i) = J_{i+1}(x) \leq J_\infty(x) \quad \forall i \geq k. \end{aligned}$$

Следовательно, $\{u_i \mid i \geq k\} \subset U_k[x, J_\infty(x)]$ для любого $k \geq \bar{k}$. Так как множество $U_k[x, J_\infty(x)]$ компактно, то все предельные точки последовательности $\{u_i \mid i \geq k\}$ принадлежат множеству $U_k[x, J_\infty(x)]$ и существует по крайней мере одна такая точка. Отсюда следует, что если $\bar{u}$ является предельной точкой последовательности $\{u_i \mid i \geq \bar{k}\}$, то

$$\bar{u} \in \bigcap_{k=\bar{k}}^{\infty} U_k[x, J_\infty(x)].$$

Следовательно, неравенство

$$J_\infty(x) \geq g(x, \bar{u}) + \alpha \int J_k(x')t(dx' \mid x, \bar{u}) \geq J_{k+1}(x)$$

выполняется для всех $k \geq \bar{k}$.

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и используя теорему о монотонном предельном переходе под знаком интеграла, получим, что неравенство

$$J_\infty(x) = g(x, \bar{u}) + \alpha \int J_\infty(x')t(dx' \mid x, \bar{u}) \geq J_\infty^*(x) \quad (36)$$

справедливо для всех $x \in S$, при которых $J_\infty(x) < \infty$. При $J_\infty(x) = \infty$ неравенство (36) тоже справедливо и, таким образом, оно верно для всех $x \in S$. Из неравенств (35) и (36) видно, что $J_\infty = T(J_\infty)$, и должны выполняться условия (а) — (г) предложения 9.16. В частности из неравенств (35) и (36) получаем, что для любого $x \in S$ существует управление $\bar{u} \in U(x)$

такое, что

$$J^*(x) = g(x, \bar{u}) + \alpha \int J^*(x') t(dx' | x, \bar{u}) = T(J^*)(x).$$

Существование оптимальной нерандомизированной стационарной стратегии для модели (SM) вытекает из следствия 9.12.1.

В случае (D) условия (а) — (г) предложения 9.16 выполняются в силу предложения 9.14. Если мы заменим функцию g на $g + b$, то получим модель типа (P). Эта новая модель также удовлетворяет предположениям нашего предложения, поэтому для нее существует оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия. Эта стратегия оптимальна также и для исходной модели типа (D). $\square$

Следствие 9.17.1. (P) (D) *Предположим, что множество $U(x)$ конечно для любого $x \in S$. Тогда $\bar{J}_\infty = \bar{J}^*$, $J_\infty = J^*$ и в модели (SM) существует оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия. Более того, если множество S конечно, а функция g и множество Γ измеримы по Борелю, то в модели (SM) функция J^* борелевская и существует борелевская оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия.*

Следствие 9.17.2. (P) (D) *Предположим, что условия (а) — (г) предложения 8.7 (полунепрерывная снизу модель) выполнены. Тогда $\bar{J}_\infty = \bar{J}^*$, $J_\infty = J^*$, функция J^* полунепрерывна снизу и в модели (SM) существует измеримая по Борелю оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия.*

Доказательство. Из доказательства предложения 8.6 видно, что функции J_k полунепрерывны снизу при $k = 1, 2, \dots$, так же, как и функции

$$\hat{K}_k(x, u) = \begin{cases} g(x, u) + \alpha \int J_k(x') t(dx' | x, u), & \text{если } (x, u) \in \Gamma, \\ \infty, & \text{если } (x, u) \notin \Gamma. \end{cases} \quad (37)$$

Для любого числа $\lambda \in R$ и фиксированного k нижнее множество уровня $\{(x, u) \in SC \mid \hat{K}_k(x, u) \leq \lambda\} \subset \Gamma$

замкнуто, поэтому для любого фиксированного $x \in S$ множество

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in C \mid \hat{K}_k(x, u) \leq \lambda\}$$

компактно. Теперь можно обратиться к предложению 9.17, и остается только доказать, что оптимальную нерандомизированную стационарную стратегию, существование которой гарантировано этим предложением, можно выбрать среди борелевских стратегий. Это будет следовать из предложения 9.12 и доказательства предложения 8.6, как только мы покажем, что функция $J_\infty = J^*$ полунепрерывна снизу. В случае (P) $J_k \uparrow J^*$, поэтому множество

$$\{x \in S \mid J^*(x) \leq \lambda\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{x \in S \mid J_k(x) \leq \lambda\}$$

замкнуто и функция J^* полунепрерывна снизу. В случае (D)

$$J_k - b \sum_{j=k}^{\infty} \alpha^j \uparrow J^*,$$

поэтому аналогичные рассуждения показывают, что функция J^* полунепрерывна снизу. $\square$

Следствие 9.17.3. *Выводы следствия 9.17.2 справедливы, если вместо предположений компактности множества S и замкнутости любого множества 14. Д. Бертскас*

ва Γ^i , сделанных в определении 8.7, предположить компактность любого множества Γ^i .

Предложение 9.17 и его следствия дают условия, при которых алгоритм динамического программирования может использоваться для нахождения функции J^* в случаях (P) и (D). Как показано в следующем предложении, алгоритм динамического программирования может быть также использован для построения оптимальной стационарной стратегии.

Предложение 9.18. (P) (D) *Предположим, что либо множество $U(x)$ конечно при любом $x \in S$, либо выполняются условия (а) – (д) определения 8.7. Тогда для любого $k \geq 0$ существует универсально измеримый селектор $\mu_k: S \rightarrow C$ такой, что $\mu_k(x) \in U(x)$ при всех $x \in S$ и*

$$T_{\mu_k}(J_k) = T(J_k). \quad (38)$$

Если $\{\mu_k\}$ – последовательность таких селекторов, то для любого $x \in S$ последовательность $\{\mu_k(x)\}$ имеет по крайней мере одну точку сгущения. Если функция $\mu: S \rightarrow C$ универсально измерима, $\mu(x)$ является точкой сгущения последовательности $\{\mu_k(x)\}$ для любого $x \in S$ такого, что $J^*(x) < \infty$, и $\mu(x) \in U(x)$ для любого $x \in S$ такого, что $J^*(x) = \infty$, то стратегия $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ является оптимальной стационарной стратегией в модели (SM).

Доказательство. Если множество $U(x)$ конечно при всех $x \in S$, то множества $U_k(x, \lambda)$, определенные формулой (34), компактны для любых $k \geq 0$, $x \in S$ и $\lambda \in R$. Из доказательства следствия 9.17.2 видно, что эти множества компактны также и при выполнении условий (а) – (д) определения 8.7. Существование функций $\mu_k: S \rightarrow C$, удовлетворяющих равенству (38), таких, что $\mu_k(x) \in U(x)$ для любого $x \in S$, следует из леммы 3.1 и предложения 7.50.

В случае (P) из доказательства предложения 9.17 видно, что при каждом $x \in S$ таком, что $J^*(x) < \infty$, последовательность $\{\mu_k(x)\}$ имеет по крайней мере одну точку сгущения, и любая точка сгущения принадлежит множеству $U(x)$. Если функция $\mu: S \rightarrow C$ универсально измерима и $\mu(x)$ представляет собой точку сгущения последовательности $\{\mu_k(x)\}$ при каждом $x \in S$ таком, что $J^*(x) < \infty$, то из неравенств (35) и (36) и предложения 9.17 получим, что равенство

$$J^*(x) = g[x, \mu(x)] + \alpha \int J^*(x') t(dx' | x, \mu(x)) \quad (39)$$

выполняется для всех $x \in S$ таких, что $J^*(x) < \infty$. Если $\mu(x) \in U(x)$ для всех $x \in S$ таких, что $J^*(x) = \infty$, то неравенство

$$J^*(x) = T(J^*)(x) \leq g[x, \mu(x)] + \alpha \int J^*(x') t(dx' | x, \mu(x)) \leq \infty = J^*(x) \quad (40)$$

выполняется для всех $x \in S$ таких, что $J^*(x) = \infty$. Из соотношений (39) и (40) имеем равенство $J^* = T_{\mu}(J^*)$, и в силу предложения 9.12 стратегия $\pi = (\mu, \mu, \dots)$ является оптимальной.

В случае (D) мы можем заменить функцию g на $g + b$ для того, чтобы получить модель типа (P), удовлетворяющую предположениям нашего предложения. Выводы предложения справедливы для этой новой модели, поэтому они справедливы также и для исходной модели типа (D). $\square$

Чуть более сильный вариант предложения 9.18 можно найти в [81].

Следствие 9.18.1. *Если выполнены условия (б) – (д) определения 8.7, и если любое множество Γ^i из условия (б) компактно, то справедливы выводы предложения 9.18.*

9.6. Существование ϵ -оптимальных стратегий

Мы охарактеризовали стационарные оптимальные стратегии и дали условия, при которых оптимальные стратегии существуют. Теперь обратимся к вопросу о существовании ϵ -оптимальных стратегий. Для фиксированного состояния $x \in S$ по определению существует стратегия, которая ϵ -оптимальна в точке x . Нам бы хотелось знать, как из этой совокупности стратегий, каждая из которых ϵ -оптимальна в единственной точке, можно составить одну стратегию, которая была бы ϵ -оптимальной в любой точке. С этим связан аналогичный вопрос, касающийся оптимальных стратегий. Если для любой точки существует стратегия, которая оптимальна в этой точке, то можно ли найти оптимальную стратегию? Ответы на эти вопросы даются в следующих двух предложениях.

Предложение 9.19. (P) (D) В модели (SM) для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная нерандомизированная марковская стратегия, и если $\alpha < 1$, то она может быть выбрана в классе стационарных стратегий. Если в модели (SM) для любого $x \in S$ существует стратегия, которая оптимальна в точке x , то существует оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия.

Доказательство. Выберем числа $\epsilon > 0$ и $\epsilon_k > 0$ такие, что $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \epsilon_k = \epsilon$. Если $\alpha < 1$, то положим $\epsilon_k = (1 - \alpha)\epsilon$ для любого k . В силу предложения 7.50 существуют универсально измеримые функции $\mu_k: S \rightarrow C$, $k = 0, 1, \dots$ такие, что $\mu_k(x) \in U(x)$ для любого $x \in S$ и $T_{\mu_k}(J^*) \leq J^* + \epsilon_k$. Если $\alpha < 1$, то выберем все функции μ_k одинаковыми. Тогда

$$(T_{\mu_{k-1}} T_{\mu_k})(J^*) \leq T_{\mu_{k-1}}(J^*) + \alpha \epsilon_k \leq J^* + \epsilon_{k-1} + \alpha \epsilon_k.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$(T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J^*) \leq J^* + \sum_{j=0}^k \alpha^j \epsilon_j \leq J^* + \epsilon$$

и, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J^*) \leq J^* + \epsilon.$$

В случае (P) имеем предельное неравенство

$$J_{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J^*), \quad (41)$$

поэтому $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ является ϵ -оптимальной стратегией.

В случае (D) имеем

$$J_0 \leq J^* + [b/(1 - \alpha)],$$

$$\begin{aligned} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J_0) &\leq (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J^* + [b/(1 - \alpha)]) = \\ &= [\alpha^{k+1} b/(1 - \alpha)] + (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J^*), \end{aligned}$$

поэтому неравенство (41) выполнено, и стратегия $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ ϵ -оптимальна. Тем самым доказана первая часть предложения.

Предположим теперь, что в модели (SM) для любого $x \in S$ существует стратегия, которая оптимальна в точке x . Зафиксируем x , и пусть $\pi = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ — стратегия, оптимальная в точке x . В силу предложения 9.1 мы можем считать, без ограничения общности, что π является мар-

ковской стратегией. В силу леммы 8.4 (б) и (в) имеем

$$\begin{aligned} J^*(x) &= J_\pi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_0} T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J_0)(x) = \\ &= T_{\mu_0} [\lim_{k \rightarrow \infty} (T_{\mu_1} \cdots T_{\mu_k})(J_0)](x) \geq T_{\mu_0}(J^*)(x) \geq T(J^*)(x) = J^*(x). \end{aligned}$$

Следовательно, $T_{\mu_0}(J^*)(x) = T(J^*)(x)$. Отсюда следует, что инфимум в выражении

$$\inf_{u \in U(x)} \{g(x, u) + \alpha \int J^*(x') t(dx' | x, u)\}$$

достигается. Так как точка x произвольна, то из следствия 9.12.1 вытекает существование оптимальной нерандомизированной стационарной стратегии. $\square$

Предложение 9.20. (N) В модели (SM) для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная нерандомизированная полумарковская стратегия. Если в модели (SM) для любого $x \in S$ существует стратегия, которая оптимальна в точке x , то существует полумарковская (рандомизированная) оптимальная стратегия.

Доказательство. В случае (N) имеет место сходимость $J_k \downarrow J^*$ (предложение 9.14), поэтому при заданном $\epsilon > 0$ аналитически измеримые множества

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in S | J^*(x) > -\infty, J_k(x) \leq J^*(x) + \epsilon/2\} \cup \\ &\cup \{x \in S | J^*(x) = -\infty, J_k(x) \leq -(2 + \epsilon^2)/2\epsilon\} \end{aligned}$$

сходятся к множеству S при $k \rightarrow \infty$. В силу предложения 8.3 для любого k существует нерандомизированная полумарковская при горизонте k стратегия π^k такая, что для любого $x \in S$

$$J_{k, \pi^k}(x) > \begin{cases} J_k(x) + (\epsilon/2), & \text{если } J_k(x) \neq -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } J_k(x) = -\infty. \end{cases}$$

Тогда для $x \in A_k$ имеем либо $J^*(x) > -\infty$ и

$$J_{k, \pi^k}(x) \leq J_k(x) + (\epsilon/2) \leq J^*(x) + \epsilon,$$

либо $J^*(x) = -\infty$. Если $J^*(x) = -\infty$, то либо $J_k(x) = -\infty$ и $J_{k, \pi^k}(x) \leq -1/\epsilon$, либо $J_k(x) > -\infty$ и

$$J_{k, \pi^k}(x) \leq J_k(x) + (\epsilon/2) \leq -[(2 + \epsilon^2)/2\epsilon] + (\epsilon/2) = -1/\epsilon.$$

Выберем какую-нибудь функцию $\mu \in U(C|S)$ и положим $\hat{\pi}^k = (\mu_0^k, \dots, \mu_{k-1}^k, \mu, \mu, \dots)$, где $\pi^k = (\mu_0^k, \dots, \mu_{k-1}^k)$. Для любого $x \in A_k$ получим

$$J_{\hat{\pi}^k}(x) \leq J_{k, \pi^k}(x) \leq \begin{cases} J^*(x) + \epsilon, & \text{если } J^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } J^*(x) = -\infty, \end{cases}$$

поэтому $\hat{\pi}^k$ является нерандомизированной полумарковской стратегией, ϵ -оптимальной для любого $x \in A_k$. Стратегия π , определенная так, чтобы она совпадала со стратегией $\hat{\pi}^k$, когда начальное состояние принадлежит множеству A_k , но не множествам A_j с $j < k$, является полумарковской нерандомизированной стратегией, ϵ -оптимальной в любой точке $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = S$.

Предположим теперь, что в модели (SM) для любого $x \in S$ существует стратегия π^x , оптимальная в точке x . Пусть $\bar{\pi}^x$ — стратегия в модели (DM), которая соответствует стратегии π^x , и пусть $(p_x, q_0^x, q_1^x, \dots)$ — последовательность, порожденная мерой p_x и стратегией $\bar{\pi}^x$ посредством уравнений (10) и (11). Если функция $G: \Delta \rightarrow [-\infty, 0]$ определена формулой (15), то из предложения 9.3 имеем

$$J^*(x) = J_{\pi^x}(x) = \bar{J}_{\bar{\pi}^x}(p_x) = G(p_x, q_0^x, q_1^x, \dots). \quad (42)$$

Из предложения 9.5 и равенства (16) получим

$$J^*(x) = \bar{J}^*(p_x) = \inf_{(q_0, q_1, \dots) \in \Delta p_x} G(p_x, q_0, q_1, \dots). \quad (43)$$

Следовательно, инфимум в равенстве (43) достигается для любой меры $p_x \in \bar{S}$, где $\bar{S} = \{p_y | y \in S\}$, поэтому в силу предложения 7.50 существует универсально измеримый селектор $\psi: \bar{S} \rightarrow P(SC)P(SC) \dots$ такой, что $\psi(p_x) \in \Delta p_x$ и

$$J^*(x) = \bar{J}^*(p_x) = G[p_x, \psi(p_x)] \quad \forall p_x \in \bar{S}.$$

Пусть отображение $\delta: S \rightarrow \bar{S}$ представляет собой гомеоморфизм $\delta(x) = p_x$, и пусть $\varphi(x) = \psi[\delta(x)]$. Тогда функция φ универсально измерима, $\varphi(x) \in \Delta p_x$ и

$$J^*(x) = G[p_x, \varphi(x)] \quad \forall x \in S. \quad (44)$$

Обозначим

$$\varphi(x) = [q_0(d(x_0, u_0)|x), q_1(d(x_1, u_1)|x), \dots].$$

Для любого $k \geq 0$ $q_k(d(x_k, u_k)|x)$ является универсально измеримым стохастическим ядром на $S_k C_k$ при условии S , и в силу предложения 7.27 и леммы 7.28 (а), (б) ядро $q_k(d(x_k, u_k)|x)$ может быть разложено на свою проекцию $p_k(dx_k|x)$, которая представляет собой универсально измеримое стохастическое ядро на S_k при условии S , и универсально измеримое стохастическое ядро $\mu_k(du_k|x, x_k)$ на C_k при условии SS_k . Так как $p_0(dx_0|x) = p_x(dx_0)$, то стохастическое ядро $\mu_0(du_0|x, x_0)$ произвольно, за исключением случаев, когда $x = x_0$. Положим

$$\bar{\mu}_0(du_0|x) = \mu_0(du_0|x, x) \quad \forall x \in S.$$

Последовательность $\pi = (\bar{\mu}_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$ — рандомизированная полумарковская стратегия в модели (SM). Из равенства (7) главы 8 видно, что

$$q_k(\pi, p_x) = q_k(d(x_k, u_k)|x)$$

$$\forall x \in S \quad k = 0, 1, \dots$$

Из соотношений (5), (15) и (44) следует

$$J_\pi(x) = G[p_x, q_0(\pi, p_x), q_1(\pi, p_x), \dots] = J^*(x) \quad \forall x \in S,$$

поэтому π — оптимальная стратегия. $\square$

Хотя рандомизированные стратегии — не самые лучшие стратегии и их избегают на практике, в случае (N), как показано здесь, их нельзя исключить из рассмотрения даже в детерминированных задачах, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 3 (Санкт-Петербургский парадокс). Пусть $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, $C = \{0, 1\}$, $U(x) = C$ для любого $x \in S$, $\alpha = 1$,

$$f(x, u) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } u = 1, x \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g(x, u) = \begin{cases} -2^x, & \text{если } x \neq 0, u = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если движение начинается из состояния 1, то любая нерандомизированная стратегия либо неограниченно увеличивает номер состояния на единицу, причем издержки остаются равными 0, либо после k увеличений номера состояния переводит систему скачком в 0 с издержками, равными -2^{k+1} , а в 0 система навсегда остается без дальнейших издержек. Таким образом, $J^*(1) = -\infty$, но эти издержки недостижимы ни при какой нерандомизированной стратегии. С другой стороны, рандомизированная стационарная стратегия, которая переводит систему в 0 с вероятностью $\frac{1}{2}$ из любого ненулевого состояния, обеспечивает средние издержки, равные $-\infty$, и является оптимальной в любой точке $x \in S$.

В примере 3 функция издержек за один шаг g неограничена, но за счет незначительных изменений пример может быть переделан так, чтобы функция g была ограниченной, и оптимальные стратегии существовали только среди рандомизированных стратегий. Если потребовать, чтобы функция J^* была конечной, то, может быть, в предложении 9.20 удалось бы ограничиться нерандомизированными стратегиями. Это — нерешенная задача.

Если модель (SM) полунепрерывная снизу, то предложение 9.19 может быть усилено, как это видно из следствия 9.17.2. Аналогично, если модель (SM) является полунепрерывной сверху, то можно доказать более сильный вариант предложения 9.20.

Предложение 9.21. *Предположим, что модель (SM) удовлетворяет условиям (а) — (г) определения 8.8 (полунепрерывная сверху модель).*

(D) *Для любого числа $\epsilon > 0$ существует измеримая по Борелю ϵ -оптимальная нерандомизированная стационарная стратегия.*

(N) *Для любого числа $\epsilon > 0$ существует измеримая по Борелю ϵ -оптимальная нерандомизированная полумарковская стратегия. В обоих случаях (D) и (N) функция J^* полунепрерывна сверху.*

Доказательство. В случаях (D) и (N) имеет место сходимости $\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = J^*$ (предложение 9.14), и любая функция J_k полунепрерывна сверху (предложение 8.7). С помощью рассуждений, аналогичных тем, что использовались при доказательстве следствия 9.17.2, устанавливается, что функция J^* полунепрерывна сверху.

Используя предложение 7.34 вместо предложения 7.50, доказательство предложения 9.19 можно модифицировать так, чтобы установить для случая (D) существование измеримой по Борелю ϵ -оптимальной нерандомизированной стационарной стратегии. Используя предложение 8.7 вместо предложения 8.3, можно изменить доказательство предложения 9.20 так, чтобы показать существование измеримой по Борелю ϵ -оптимальной нерандомизированной полумарковской стратегии в случае (N). $\square$

В моделях глав 8 и 9 управляющему лицу на каждом шаге известно текущее состояние системы. Однако во многих практически важных случаях имеется доступ лишь к неполной информации о состоянии системы. Эта глава посвящена изучению моделей, описывающих подобную ситуацию. Нам потребуются нестационарный вариант моделей глав 8 и 9. В ближайшем разделе мы покажем, что нестационарные модели сводятся к стационарным с помощью подходящей переформулировки. Таким образом, мы получим для нестационарного случая результаты, аналогичные результатам глав 8 и 9.

10.1. Сведение нестационарной модели к стационарной — расширение множества состояний

О модели стохастического оптимального управления с конечным горизонтом из определения 8.1 и о модели стохастического оптимального управления с бесконечным горизонтом из определения 9.1 говорят как о стационарных моделях, потому что параметры этих моделей не изменяются от шага к шагу. В данном разделе мы дадим определение нестационарной модели и покажем, как ее можно свести к стационарной за счет включения времени в расширенное состояние.

Мы будем изучать модели с бесконечным и конечным горизонтом одновременно. Поэтому если $N = \infty$ и появляется запись вида $S_0, S_1, \dots, S_{N-1}$ или $k = 0, \dots, N-1$, то ее надо понимать как $S_0, S_1, \dots$ и $k = 0, 1, \dots$

Определение 10.1. *Нестационарная стохастическая модель оптимального управления, обозначаемая (NSM), определяется следующими элементами:*

Горизонт N . Целое положительное число или ∞ .

Пространства состояний $S_k, k = 0, \dots, N-1$. Для любого k множество S_k — непустое борелевское пространство.

Пространства управлений $C_k, k = 0, \dots, N-1$. Для любого k множество C_k — непустое борелевское пространство.

Ограничения на управления $U_k, k = 0, \dots, N-1$. Для любого k множество U_k — функция на множестве S_k со значениями в классе непустых подмножеств множества C_k , причем множество

$$\Gamma_k = \{(x_k, u_k) | x_k \in S_k, u_k \in U_k(x_k)\} \quad (1)$$

предполагается аналитическим в пространстве $S_k C_k$.

Пространства возмущений $W_k, k = 0, \dots, N-1$. Для любого k множество W_k — непустое борелевское пространство.

Ядра возмущений $p_k(dw_k | x_k, u_k), k = 0, \dots, N-1$. Для любого k $p_k(dw_k | x_k, u_k)$ — измеримое по Борелю стохастическое ядро на множестве W_k при условии $S_k C_k$.

Функция системы $f_k, k = 0, \dots, N-2$. Для любого k f_k — измеримая по Борелю функция на $S_k C_k W_k$ со значениями в S_{k+1} .

Коэффициент дисконтирования α . Положительное действительное число.

Функция издержек за один шаг $g_k, k = 0, \dots, N-1$. Для любого k g_k — полуаналитическая снизу функция на Γ_k со значениями в R^+ .

Мы т.о. описали систему, которая начинает движение из некоторого состояния $x_k \in S_k$ и проходит последовательно пространства

$S_{k+1}, S_{k+2}, \dots$ и, если $N < \infty$, заканчивает движение в S_{N-1} . Стратегия, управляющая эволюцией системы, представляет собой последовательность $\pi^k = (\mu_k, \mu_{k+1}, \dots, \mu_{N-1})$, каждый член которой μ_j является универсально измеримым стохастическим ядром на C_j при условии $S_k C_k \dots C_{j-1} S_j$, удовлетворяющим равенству

$$\mu_j(U_j(x_j) | x_k, u_k, \dots, u_{j-1}, x_j) = 1$$

для любой истории $(x_k, u_k, \dots, u_{j-1}, x_j)$. Такая стратегия называется стратегией, начинающейся в момент k , и семейство всех стратегий, начинающихся в момент k , будет обозначаться Π^k . Понятия полумарковской, марковской, нерандомизированной и F-измеримой стратегий аналогичны тем, что введены в определениях 8.2 и 9.2. Множество Π^0 обозначается также через Π' , а подмножество множества Π' , состоящее из марковских стратегий, обозначается через Π .

Определим измеримые по Борелю стохастические переходные ядра соотношением.

$$t_k(\underline{S}_{k+1} | x_k, u_k) = p_k(\{w_k \in W_k | f_k(x_k, u_k, w_k) \in \underline{S}_{k+1}\} | x_k, u_k) \\ \forall \underline{S}_{k+1} \in \mathcal{B}_{S_{k+1}}.$$

Для данных вероятностной меры $p_k \in P(S_k)$ и стратегии $\pi^k = (\mu_k, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi^k$ определим для $j = k, k+1, \dots, N-1$ меру

$$q_j(\pi^k, p_k)(\underline{S}_j \underline{C}_j) = \int_{S_k} \int_{C_k} \dots \\ \dots \int_{C_{j-1}} \int_{\underline{S}_j} \mu_j(\underline{C}_j | x_k, u_k, \dots, u_{j-1}, x_j) t_{j-1}(dx_j | x_{j-1}, u_{j-1}) \times \\ \times \mu_{j-1}(du_{j-1} | x_k, u_k, \dots, u_{j-2}, x_{j-1}) \dots \\ \dots \mu_k(du_k | x_k) p_k(dx_k) \quad \forall \underline{S}_j \in \mathcal{B}_{S_j}, \quad \underline{C}_j \in \mathcal{B}_{C_j}. \quad (2)$$

Существует единственная вероятностная мера $q_j(\pi^k, p_k) \in P(S_j C_j)$, удовлетворяющая соотношению (2).

Если горизонт N конечен, то будем рассматривать модель (NSM) только при одном из следующих условий:

$$\int_{S_j C_j} g_j^-(x_j, u_j) dq_j(\pi^k, p_{x_k}) < \infty \\ \forall \pi^k \in \Pi^k, \quad x_k \in S_k, \quad k \leq j \leq N-1, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (F^+) \\ \int_{S_j C_j} g_j^+(x_j, u_j) dq_j(\pi^k, p_{x_k}) < \infty \\ \forall \pi^k \in \Pi^k, \quad x_k \in S_k, \quad k \leq j \leq N-1, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (F^-)$$

Если $N = \infty$, то будем рассматривать модель (NSM) только при одном из условий:

- (P) $0 \leq g_k(x_k, u_k)$ для любых $(x_k, u_k) \in \Gamma_k$, $k = 0, \dots, N-1$.
- (N) $g_k(x_k, u_k) \leq 0$ для любых $(x_k, u_k) \in \Gamma_k$, $k = 0, \dots, N-1$.
- (D) $0 < \alpha < 1$ и для некоторого $b \in R$ неравенство $-b \leq g_k(x_k, u_k) \leq b$ выполняется для любых $(x_k, u_k) \in \Gamma_k$, $k = 0, \dots, N-1$.

Так же, как и в главах 8 и 9, символы (F^+) , (F^-) , (P), (N) и (D) будут использоваться в формулировках теорем для обозначения тех случаев, в которых результаты справедливы.

Определим издержки, начиная с момента k , соответствующие стратегии π^k и состоянию $x_k \in S_k$, следующим образом:

$$J_{\pi^k}(x_k, k) = \sum_{j=k}^{N-1} \alpha^j \int_{S_j C_j} g_j(x_j, u_j) dq_j(\pi^k, p_{x_k})$$

и оптимальные издержки, начиная с момента k для состояния $x_k \in S_k$, соотношением

$$J^*(x_k, k) = \inf_{\pi^k \in \Pi^k} J_{\pi^k}(x_k, k). \quad (3)$$

Стратегия $\pi \in \Pi^0$ называется ϵ -оптимальной в состоянии $x_0 \in S_0$, если

$$J_{\pi}(x_0, 0) \leq \begin{cases} J^*(x_0, 0) + \epsilon & \text{при } J^*(x_0, 0) > -\infty, \\ -1/\epsilon & \text{при } J^*(x_0, 0) = -\infty. \end{cases}$$

Стратегия π называется оптимальной в состоянии x_0 , если $J_{\pi}(x_0, 0) = J^*(x_0, 0)$. Будем говорить, что стратегия $\pi \in \Pi^0$ ϵ -оптимальна (оптимальна), если она ϵ -оптимальна (оптимальна) в любом состоянии $x_0 \in S_0$. Пусть $\{\epsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел такая, что $\epsilon_n \downarrow 0$; будем говорить, что последовательность стратегий $\{\pi_n\} \in \Pi^0$ обладает $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности, если выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\pi_n}(x_0, 0) = J^*(x_0, 0) \quad \forall x_0 \in S_0$$

и для $n = 2, 3, \dots$ выполняется неравенство

$$J_{\pi_n}(x_0, 0) \leq \begin{cases} J^*(x_0, 0) + \epsilon_n & \text{при } J^*(x_0, 0) > -\infty, \\ J_{\pi_{n-1}}(x_0, 0) + \epsilon_n & \text{при } J^*(x_0, 0) = -\infty. \end{cases}$$

Определение 10.2. Пусть дана нестационарная стохастическая модель оптимального управления, сформулированная в определении 10.1. Соответствующая стационарная стохастическая модель оптимального управления, обозначаемая (SSM), состоит из следующих элементов. (T является конечным состоянием и одновременно единственным управлением, доступным в этом состоянии. Если $N = \infty$, то T можно не вводить.)

Пространство состояний $S = \bigcup_{k=0}^{N-1} \{(x_k, k) | x_k \in S_k\} \cup \{T\}$.

Пространство управлений $C = \bigcup_{k=0}^{N-1} \{(u_k, k) | u_k \in C_k\} \cup \{T\}$.

Ограничение на управление U . Функция на множестве S со значениями в классе подмножеств множества G , определяемая соотношениями $U(x_k, k) = \{(u_k, k) | u_k \in U_k(x_k)\}$, $U(T) = \{T\}$.

Пространство возмущений $W = \bigcup_{k=0}^{N-1} \{(w_k, k) | w_k \in W_k\}$.

Ядро возмущений $p(dw | x, u)$. Для $\underline{W}_k \in \mathcal{B}_{W_k}$ полагаем

$$p(\{(w_k, k) | w_k \in \underline{W}_k\} | (x_k, k), (u_k, k)) = p_k(\underline{W}_k | x_k, u_k). \quad (4)$$

Функция системы f . Определим эту функцию для $k = 0, \dots, N-2$ равенством

$$f[(x_k, k), (u_k, k), (w_k, k)] = [f_k(x_k, u_k, w_k), k+1] \quad (5)$$

и для двух остальных моментов времени — равенствами

$$f[(x_{N-1}, N-1), (u_{N-1}, N-1), (w_{N-1}, N-1)] = T, \quad (6)$$

$$f(T, T, w) = T. \quad (7)$$

Коэффициент дисконтирования α .

Функция издержек за один шаг g . Полагаем

$$g[(x_k, k), (u_k, k)] = g_k(x_k, u_k), \quad (8)$$

$$g(T, T) = 0. \quad (9)$$

Горизонт N .

Рассмотрим отображение $\varphi_k: S_k \rightarrow S$, определяемое равенством $\varphi_k(x_k) = (x_k, k)$. Наделим пространство состояний S топологией, в которой отображение φ будет гомеоморфизмом, и снабдим пространства S и W аналогичной топологией. Пространства S , C и W борелевские. Множество

$$\Gamma = \{(x, u) | x \in S, u \in U(x)\} =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{N-1} \{(x_k, k), (u_k, k) | (x_k, u_k) \in \Gamma_k\} \cup \{(T, T)\}$$

является аналитическим, а функция g , определенная на множестве Γ равенствами (8) и (9), является полуаналитической снизу. Ядро возмущений $p(dw | x, u)$ определено посредством равенства (4) не на всем множестве SC , а только на его борелевском подмножестве, содержащем множество $\Gamma - \{(T, T)\}$, но большего и не требуется. Точно так же и функция системы f не определена на всем множестве SCW равенствами (5) — (7), но множество точек, где она не определена, имеет нулевую вероятность при любой стратегии, управляющей эволюцией системы. Как ядро $p(dw | x, u)$, так и функция f измеримы по Борелю в своих областях определения. Таким образом, модель (SSM) представляет собой частный случай модели стохастического оптимального управления, сформулированной в определении 8.1 ($N < \infty$) или в определении 9.1 ($N = \infty$).

При $N < \infty$ в разделе 8.1 для модели (SSM) были сформулированы условия (F^+) и (F^-) . Эти условия эквивалентны соответствующим условиям (F^+) и (F^-) для модели (NSM), приведенным в этом разделе. При $N = \infty$ условия (P), (N) и (D) для модели (SSM), сформулированные в определении 9.1, эквивалентны соответствующим условиям (P), (N) и (D) для модели (NSM), приведенным выше в этом разделе.

Читатель может проверить, что стратегии в моделях (NSM) и (SSM) соответствуют друг другу и что оптимальные издержки в состоянии $(x_k, k) \in S$ в модели (SSM) задаются функцией $J^*(x_k, k)$, определенной соотношением (3). В силу этого результаты, уже доказанные для модели (SSM) с конечным либо бесконечным горизонтом, автоматически переносятся на модель (NSM). В качестве иллюстрации приведем нестационарное уравнение оптимальности.

Предложение 10.1. (P) (N) (D) Пусть функция $J^*(x_k, k)$ определена соотношением (3). Для любого фиксированного номера k функция $J^*(x_k, k)$ является полуаналитической снизу на множестве S_k и удовлетворяет соотношению

$$J^*(x_k, k) = \inf_{u_k \in U_k(x_k)} \{g_k(x_k, u_k) + \\ + \alpha \int_{S_{k+1}} J^*(x_{k+1}, k+1) t_k(dx_{k+1} | x_k, u_k)\}.$$

Мы не будем перечислять все результаты для модели (NSM), которые можно получить из результатов для модели (SSM). Читатель может проверить, например, что условия существования из предложений 8.3 и 8.4 дословно справедливы для модели (NSM). Из предложений 9.19 и 9.20 получим, что для модели (NSM) в случаях (P) и (D) существует ϵ -оптимальная нерандомизированная марковская стратегия, а в случае (N) — ϵ -оптимальная нерандомизированная полумарковская стратегия. В дальнейшем мы будем использовать эти результаты, ссылаясь только на их стационарные аналоги.

10.2. Сведение модели с неполной информацией к модели с полной информацией — достаточные статистики

Прежде чем давать определение модели с неполной информацией, приведем без доказательства некоторые свойства условных математических ожиданий и условных вероятностей, которыми мы будем пользоваться. Более подробное изложение этого материала см. в [7]*). Всюду в этом тексте тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ обозначает вероятностное пространство, а X — действительную в расширенном смысле случайную величину на множестве Ω , для которой одно из выражений $E[X^+]$ или $E[X^-]$ является конечным.

Если $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ есть σ -алгебра в множестве Ω , то *условное математическое ожидание величины X относительно $\mathcal{D}$* — это $\mathcal{D}$ -измеримая действительная в расширенном смысле случайная величина $E[X|\mathcal{D}]$ ($\cdot$) на множестве Ω , удовлетворяющая равенству

$$\int_D X(\omega) P(d\omega) = \int_D E[X|\mathcal{D}](\omega) P(d\omega) \quad \forall D \in \mathcal{D}.$$

Можно показать, что существует по крайней мере одна такая случайная величина. Любая такая случайная величина будет называться *вариантом условного математического ожидания $E[X|\mathcal{D}]$* . Если $X(\omega) \geq b$ для некоторого числа $b \in \mathbb{R}$ и любого элемента $\omega \in \Omega$, то можно показать, что для любого варианта $E[X|\mathcal{D}]$ ($\cdot$) случайная величина $\hat{E}[X|\mathcal{D}]$ ($\cdot$), определяемая соотношением

$$\hat{E}[X|\mathcal{D}](\omega) = \max\{E[X|\mathcal{D}](\omega), b\},$$

также является вариантом $E[X|\mathcal{D}]$. Если $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ представляет собой семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений, и порождает σ -алгебру $\mathcal{D}$, и если Y является действительной в расширенном смысле $\mathcal{D}$ -измеримой случайной величиной, удовлетворяющей равенству

$$\int_D X(\omega) P(d\omega) = \int_D Y(\omega) P(d\omega) \quad \forall D \in \mathcal{E}, \quad (10)$$

то величина Y удовлетворяет равенству (10) для любого множества $D \in \mathcal{D}$, и Y представляет собой вариант $E[X|\mathcal{D}]$. Для любой σ -алгебры $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ соотношение

$$E\{E[X|\mathcal{D}] | \mathcal{E}\}(\omega) = E[X|\mathcal{E}](\omega) \quad (11)$$

выполняется для почти всех по мере P точек ω .

Предположим далее, что $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ — измеримые пространства и функции $Y_1: \Omega \rightarrow \Omega_1$ и $Y_2: \Omega \rightarrow \Omega_2$ измеримы. Пусть функция $g: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^*$

*) Или в любом обстоятельном курсе теории вероятностей, например в [102]. (Прим. ред.).

измерима и удовлетворяет одному из двух неравенств $E[g^+(Y_1, Y_2)] < \infty$ или $E[g^-(Y_1, Y_2)] < \infty$. По определению условное математическое ожидание X относительно Y_1 равно

$$E[X|Y_1](\omega) = E[X|F(Y_1)](\omega),$$

где $F(Y_1) = \{Y_1^{-1}(F) | F \in F_1\}$. Для $y_1 \in \Omega_1$ считаем, по определению, $E[X|Y_1 = y_1] = E[X|Y_1](\omega(y_1))$,

где $\omega(y_1)$ — произвольный элемент множества $Y_1^{-1}(\{y_1\})$. Так как величина $E[X|Y_1]$ является $F(Y_1)$ -измеримой, то она имеет постоянное значение на множестве $Y_1^{-1}(\{y_1\})$, и последнее определение имеет смысл. Заметим, что $E[X|Y_1 = y_1]$ представляет собой функцию от y_1 , а не от ω .

Для любого $y_1 \in Y_1$ равенство

$$E[g(Y_1, Y_2) | Y_1 = y_1] = E[g(Y_1, Y_2)] \quad (12)$$

выполняется для почти всех по мере P точек y_1 . Мы используем слова "для почти всех по мере P элементов y_1 " для указания того, что в этом случае

$$P(\{\omega \in \Omega | \text{ равенство (12) нарушается, когда } y_1 = Y_1(\omega)\}) = 0.$$

Для множества $F \in F_2$ определим вероятности

$$P[Y_2 \in F | Y_1](\omega) = E[\chi_F(Y_2) | Y_1](\omega),$$

$$P[Y_2 \in F | Y_1 = y_1] = E[\chi_F(Y_2) | Y_1 = y_1].$$

Пусть $t(dy_2 | y_1)$ — стохастическое ядро на множестве (Ω_2, F_2) при условии Ω_1 такое, что для любого множества $F \in F_2$ равенство $P[Y_2 \in F | Y_1 = y_1] = t(F | y_1)$ выполняется для почти всех по мере P элементов y_1 . Тогда равенство (12) может быть обобщено в виде

$$\begin{aligned} E[g(Y_1, Y_2) | Y_1 = y_1] &= E[g(Y_1, Y_2)] = \\ &= \int g(y_1, y_2) t(dy_2 | y_1) \end{aligned} \quad (13)$$

для почти всех по мере P элементов y_1 . Соотношения (1) и (13) окажутся особенно полезными при рассмотрении модели с неполной информацией. В дальнейшем они будут использоваться без ссылок на эти функции, как сами собой разумеющиеся.

Определение 10.3. *Стохастическая модель оптимального управления с неполной информацией (ISI) задается набором из десяти элементов $(S, C, (U_0, \dots, U_{N-1}), Z, \alpha, g, t, s_0, s, N)$, имеющих следующий смысл.*

Пространство состояний, пространство управлений, коэффициент дисконтирования, функция издержек за один шаг и переходное ядро S, C, α, g, t такие же, как в определении 8.1 и равенстве (3) главы 8. Считаем, что функция g определена на всем множестве SC .

Пространство наблюдений Z . Непустое борелевское пространство.

Ограничения на управления $U_k, k = 0, \dots, N-1$.

Для $k = 0, \dots, N-1$ введем множества

$$I_k = Z_0 C_0 \dots C_{k-1} Z_k. \quad (14)$$

Элемент множества I_k называется *информацией на k -м шаге*. Для любого номера k U_k представляет собой отображение множества I_k в множество непустых подмножеств пространства S такое, что множество

$$\Gamma_k = \{(i_k, u) | i_k \in I_k, u \in U_k(i_k)\} \quad (15)$$

является аналитическим.

Начальное ядро наблюдений s_0 . Измеримое по Борелю стохастическое ядро на Z при условии s .

Ядро наблюдений S . Измеримое по Борелю стохастическое ядро на Z при условии CS .

Горизонт N . Целое положительное число или ∞ .

Для простоты мы исключили из определения модели функцию системы, пространство возмущений и ядро возмущений. В дальнейшем наши обозначения будут относиться к случаю конечного горизонта N . При $N = \infty$ нужны очевидные коррективы.

Система случайным образом переходит из состояния x_k в состояние x_{k+1} с распределением вероятностей $t(dx_{k+1} | x_k, u_k)$ и издержки на каждом шаге равны $g(x_k, u_k)$. Наблюдение z_{k+1} случайное с распределением $s(dz_{k+1} | u_k, x_{k+1})$, оно присоединяется ко всем прежним наблюдениям и управлениям $(z_0, u_0, \dots, z_k, u_k)$, и получается информация $(z_0, u_0, \dots, z_k, u_k, z_{k+1})$ на $(k+1)$ -м шаге. Начальная информация $i_0 = z_0$ порождается начальным ядром наблюдений $s_0(dz_0 | x_0)$, а начальное состояние x_0 имеет некоторое заданное начальное распределение p . Задача состоит в таком выборе управления u_k , зависящего от информации i_k , который минимизировал бы выражение $E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g(x_k, u_k) \right\}$.

Определение 10.4. *Стратегия* в модели (ISI) представляет собой последовательность $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1})$, в которой $\mu_k(du_k | p; i_k)$ при любом k является универсально измеримым стохастическим ядром на C при условии $P(S) | i_k$, удовлетворяющим равенству

$$\mu_k(U_k(i_k) | p; i_k) = 1 \quad \forall (p; i_k) \in P(S) | i_k.$$

Если для любых p, k и i_k ядро $\mu_k(du_k | p; i_k)$ приписывает единичную массу некоторой точке множества C , то стратегия π называется *нерандомизированной*.

Понятия марковской и полумарковской стратегий бесполезны в модели (ISI), поскольку при оценивании текущего состояния начальное распределение, прежние наблюдения и прежние управления содержат существенную информацию. Таким образом, мы считаем, что стратегии зависят от начального распределения p и всего вектора информации. В оставшейся части этой главы через Π будет обозначаться множество всех стратегий в модели (ISI). Так как мы обозначаем множество всех последовательностей вида $(z_0, u_0, \dots, u_{k-1}, z_k) \in ZC \cdots CZ$ через I_k и называем эти последовательности информацией за k шагов, то нам кажется удобным для последовательностей вида $(x_0, z_0, u_0, \dots, x_k, z_k, u_k) \in SZC \cdots SZC$ ввести обозначение H_k и называть эти последовательности *историями* на k -м шаге. За исключением компоненты u_k , информации на k -м шаге представляют собой ту часть истории на k -м шаге, которая на k -м шаге известна управляющему лицу. Для заданных меры $p \in P(S)$ и стратегии $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi$ в силу предложения 7.45 существует последовательность согласованных вероятностных мер $P_k(\pi, p)$ на $H_k, k = 0, \dots, N-1$, определенная на измеримых прямоугольниках соотношением

$$\begin{aligned} P_k(\pi, p)(\underline{s_0} \underline{z_0} \underline{c_0} \cdots \underline{s_k} \underline{z_k} \underline{c_k}) &= \\ &= \int_{\underline{s_0}} \int_{\underline{z_0}} \int_{\underline{c_0}} \cdots \int_{\underline{s_k}} \int_{\underline{z_k}} \mu_k(\underline{c_k} | p; z_0, u_0, \dots, u_{k-1}, z_k) \times \\ &\times s(dz_k | u_{k-1}, x_k) t(dx_k | u_{k-1}, x_{k-1}) \cdots \mu_0(du_0 | p; z_0) \times \\ &\times s_0(dz_0 | x_0) p(dx_0). \end{aligned}$$

Определение 10.5. Для заданных меры $p \in P(S)$, стратегии $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi$ и положительного целого числа $K \leq N$ издержки за K шагов, соответствующие стратегии π , определяются для меры p формулой

$$J_{K, \pi}(p) = \int_{H_{K-1}} \left[\sum_{k=0}^{K-1} \alpha^k g(x_k, u_k) \right] dP_{K-1}(\pi, p). \quad (17)$$

Если $N < \infty$, то издержки, соответствующие стратегии π , равны $J_{N, \pi}$, и мы предполагаем, что либо

$$\int_{H_{N-1}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g^-(x_k, u_k) \right] dP_{N-1}(\pi, p) < \infty \quad \forall \pi \in \Pi, p \in P(S), (F^+)$$

либо

$$\int_{H_{N-1}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k g^+(x_k, u_k) \right] dP_{N-1}(\pi, p) < \infty \quad \forall \pi \in \Pi, p \in P(S). (F^-)$$

Если $N = \infty$, то издержки, соответствующие стратегии π , равны $J_\pi = \lim_{K \rightarrow \infty} J_{K, \pi}$, и чтобы гарантировать, что этот предел вполне определен, мы налагаем одно из следующих дополнительных условий:

(P) $0 \leq g(x, u)$ для любых $(x, u) \in SC$.

(N) $g(x, u) \leq 0$ для любых $(x, u) \in SC$.

(D) $0 < \alpha < 1$ и для некоторого числа $b \in R$ неравенство $-b \leq g(x, u) \leq b$ выполняется для любых $(x, u) \in SC$.

Оптимальные издержки для меры p определяются соотношением

$$J_N^*(p) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{N, \pi}(p).$$

Понятия оптимальности для меры p , оптимальности, ϵ -оптимальности для меры p и ϵ -оптимальности стратегии аналогичны тем, что введены в определении 8.3.

Если $N < \infty$ и выполняется условие (F^+) или (F^-) , то в силу леммы 7.11 (б) имеем

$$J_{N, \pi}(p) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_{H_k} g(x_k, u_k) dP_k(\pi, p) \quad \forall \pi \in \Pi, p \in P(S). \quad (18)$$

Если $N = \infty$ и выполняется условие (P), (N) или (D), то

$$J_\pi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \int_{H_k} g(x_k, u_k) dP_k(\pi, p) \quad \forall \pi \in \Pi, p \in P(S). \quad (19)$$

При исследовании модели (ISI) оказывается полезным следующее понятие достаточной (для управления) статистики — функции от результатов наблюдений, вбирающей в себя всю нужную для управления информацию.

Определение 10.6. Статистикой в модели (ISI) называется любая последовательность $(\eta_0, \dots, \eta_{N-1})$ борелевских функций $\eta_k: P(S)/k \rightarrow Y_k$, где Y_k — непустые борелевские пространства, $k = 0, \dots, N-1$. Статистика $(\eta_0, \dots, \eta_{N-1})$ называется достаточной, если:

(а) Для любого номера k существует аналитическое множество $\hat{\Gamma}_k \subset Y_k C$ такое, что $\text{proj}_{Y_k}(\hat{\Gamma}_k) = Y_k$, и для любой меры $p \in P(S)$ справедливо

равенство

$$\Gamma_k = \{(i_k, u) \mid [\eta(p; i_k), u] \in \hat{\Gamma}_k\}, \quad (20)$$

где множество Γ_k задано формулой (15). Положим

$$\hat{U}_k(y_k) = (\hat{\Gamma}_k)_{y_k}. \quad (21)$$

(б) Существуют борелевские стохастические ядра $\hat{t}_k(dy_{k+1} \mid y_k, u_k)$ на Y_{k+1} при условии $Y_k C$ такие, что для любых меры $p \in P(S)$, стратегии $\pi \in \Pi$ и множеств $\underline{Y}_{k+1} \in B_{Y_{k+1}}$, $k = 0, \dots, N-2$ равенство

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\pi, p) [\eta_{k+1}(p; i_{k+1}) \in \underline{Y}_{k+1} \mid \eta_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k] = \\ = \hat{t}_k(\underline{Y}_{k+1} \mid \bar{y}_k, \bar{u}_k) \end{aligned} \quad (22)$$

выполняется для почти всех $(\bar{y}_k, \bar{u}_k)$ по мере $P_k(\pi, p)^*$.

(в) Существуют полуаналитические снизу функции $\hat{g}_k: \hat{\Gamma}_k \rightarrow [-\infty, \infty]$ такие, что для любых меры $p \in P(S)$, стратегии $\pi \in \Pi$ и номеров $k = 0, \dots, N-1$ равенство

$$E[g(x_k, u_k) \mid \eta_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k] = \hat{g}_k(\bar{y}_k, \bar{u}_k) \quad (23)$$

выполняется для почти всех $(\bar{y}_k, \bar{u}_k)$ по мере $P_k(\pi, p)$ (математическое ожидание в (23) берется по мере $P_k(\pi, p)$).

Условие (а) определения 10.6 гарантирует, что множество допустимых управлений $U_k(i_k)$ можно восстановить по значению $\eta_k(p; i_k)$. Действительно, из равенств (15), (20) и (21) следует, что для любых меры $p \in P(S)$, вектора $i_k \in I_k$ и $k = 0, \dots, N-1$ имеем

$$U_k(i_k) = \hat{U}_k[\eta_k(p; i_k)]. \quad (24)$$

Если $U_k(i_k) = C$ для любого $i_k \in I_k$, $k = 0, \dots, N-1$, то условие (а) удовлетворяется при $\hat{\Gamma}_k = Y_k C$. Это — случай отсутствия ограничений на управление. Условие (б) гарантирует, что распределение y_{k+1} зависит только от значений y_k и u_k . Это необходимо для того, чтобы переменные y_k могли служить состояниями модели стохастического оптимального управления из раздела 10.1. Условие (в) гарантирует, что издержки, соответствующие какой-либо стратегии, могут вычисляться по индуцированным распределениям пар (y_k, u_k) .

Временно отложим обсуждение вопросов о существовании и виде достаточных статистик и рассмотрим сначала модель с полной информацией, соответствующую модели (ISI) и заданной достаточной статистике.

Определение 10.7. Пусть даны модель (ISI) и некоторая достаточная статистика $(\eta_0, \dots, \eta_{N-1})$. Модель стохастического оптимального управления с полной информацией, обозначаемая (PSI), — это совокупность следующих элементов (мы используем обозначения определений 10.3 и 10.6):

Пространство состояний Y_k , $k = 0, \dots, N-1$.

Пространство управлений C .

Ограничения на управления $\hat{U}_k$, $k = 0, \dots, N-1$.

Коэффициент дисконтирования α .

* В этом контексте слова "для почти всех $(\bar{y}_k, \bar{u}_k)$ по мере $P_k(\pi, p)$ " означают, что множество $\{(x_0, z_0, u_0, \dots, x_k, z_k, u_k) \in H_k \mid \text{равенство (22) выполняется, когда } \bar{y}_k = \eta_k(p; i_k), \bar{u}_k = u_k\}$ имеет меру $P_k(\pi, p)$, равную единице.

Функции издержек за один шаг $\hat{g}_k, k = 0, \dots, N-1$.

Переходные ядра $\hat{t}_k, k = 0, \dots, N-2$.

Горизонт N .

Определенная таким образом модель (PSI) представляет собой нестационарную модель стохастического оптимального управления в смысле определения 10.1^{*}).

Определения стратегий и функций издержек для модели (PSI) даны в разделе 10.1. Для обозначения этих элементов в модели (PSI) мы будем использовать символ $(\wedge)$. Например, $\hat{\Pi}'$ является множеством всех (начинающихся с нулевого шага) стратегий, а $\hat{\Pi}$ — множеством всех марковских (начинающихся с нулевого шага) стратегий в модели (PSI). Если $\hat{\pi} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{N-1})$ является стратегией в модели (PSI), то в силу равенства (24) и предложения 7.44 последовательность

$$(\hat{\mu}_0 [du_0 | \eta_0(p; i_0)], \dots, \hat{\mu}_{N-1} [du_{N-1} | \eta_0(p; i_0), u_0, \dots, u_{N-2}, \eta_{N-1}(p; i_{N-1})]),$$

где

$$i_k = (z_0, u_0, \dots, u_{k-1}, z_k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (25)$$

является стратегией в модели (ISI). Мы ее также обозначим $\hat{\pi}$, и можем рассматривать $\hat{\Pi}'$ как подмножество множества $\hat{\Pi}$ в указанном смысле. Если $\hat{\pi}$ — нерандомизированная стратегия в модели (PSI), то она будет также нерандомизированной стратегией и в модели (ISI). В предложении 10.2 мы увидим, что стратегия $\hat{\pi}$ приводит к одинаковым издержкам в моделях (PSI) и (ISI).

Определим отображение $\varphi: P(S) \rightarrow P(Y_0)$ соотношением

$$\varphi(p)(Y_0) = \int_S s_0(\{z_0 | \eta_0(p; z_0) \in Y_0\} | x_0) p(dx_0) \quad \forall Y_0 \in B_{Y_0}. \quad (26)$$

Тогда $\varphi(p)$ представляет собой распределение начального состояния Y_0 в модели (PSI), если начальное состояние x_0 в модели (ISI) имеет распределение p . В силу следствия 7.26.1 для любого множества $Y_0 \in B_{Y_0}$ отображение

$$\psi_{Y_0}(x_0, p) = s_0(\{z_0 | \eta_0(p; z_0) \in Y_0\} | x_0)$$

является борелевским. Определим борелевское стохастическое ядро на S при условии $P(S)$ равенством $q(dx_0 | p) = p(dx_0)$.

Тогда соотношение (26) можно переписать следующим образом:

$$\varphi(p)(Y_0) = \int \psi_{Y_0}(x_0, p) q(dx_0 | p).$$

Из предложений 7.26 и 7.29 следует, что φ измеримо по Борелю. Для любой меры $p \in P(S)$ определим отображение $V_{p,k}: H_k \rightarrow Y_0 C_0 \dots Y_k C_k$ соотношением

$$V_{p,k}(x_0, z_0, u_0, \dots, x_k, z_k, u_k) = [\eta_0(p; i_0), u_0, \dots, \eta_k(p; i_k), u_k], \quad (27)$$

^{*}) Пространства возмущений, ядра возмущений и функции системы в модели (PSI) можно положить $W_k = Y_{k+1}$, $p_k(dw_k | y_k, u_k) = \hat{t}_k(dy_{k+1} | y_k, u_k)$ и $f_k(y_k, u_k, w_k) = w_k$.

где используется обозначение (25). Любые мера $q \in P(Y_0)$ и стратегия $\hat{\pi} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{N-1}) \in \hat{\Pi}'$ порождают последовательность согласованных мер $\hat{p}_k(\hat{\pi}, q)$ на множествах $Y_0 C_0 \dots Y_k C_k, k = 0, \dots, N-1$, определяемых на измеримых прямоугольниках соотношением

$$\hat{p}_k(\hat{\pi}, q)(Y_0 C_0 \dots Y_k C_k) = \int_{Y_0} \int_{C_0} \dots \int_{Y_k} \hat{\mu}_k(C_k | y_0, u_0, \dots, u_{k-1}, y_k) \times \\ \times \hat{t}_{k-1}(dy_k | y_{k-1}, u_{k-1}) \dots \hat{\mu}_0(du_0 | y_0) q(dy_0). \quad (28)$$

В случае марковской стратегии $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}$ они связаны с вероятностными мерами $P_k(\hat{\pi}, p)$, определенными соотношением (16), следующим образом.

Лемма 10.1. *Предположим, что $p \in P(S)$ и $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}$. Тогда для любых $k = 0, \dots, N-1$ и борелевского множества $B \subset Y_0 C_0 \dots Y_k C_k$ имеем*

$$P_k(\hat{\pi}, p)[V_{p,k}^{-1}(B)] = \hat{P}_k[\pi, \varphi(p)](B). \quad (29)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что если $\underline{y}_0 \in B_{Y_0}, \underline{c}_0 \in B_{C_0}, \dots, \underline{y}_k \in B_{Y_k}, \underline{c}_k \in B_{C_k}$, то

$$P_k(\hat{\pi}, p)(\{\eta_0(p; i_0) \in \underline{y}_0, u_0 \in \underline{c}_0, \dots, \eta_k(p; i_k) \in \underline{y}_k, u_k \in \underline{c}_k\}) = \\ = \hat{P}_k[\hat{\pi}, \varphi(p)](\underline{y}_0, \underline{c}_0 \dots \underline{y}_k \underline{c}_k)^*. \quad (30)$$

Для $k=0$ равенство (30) следует из соотношений (16), (26) и (28). Если равенство (29) выполняется для некоторого номера $k < N$, то, используя соотношения (16), (22), (28) и (29), получим

$$P_{k+1}(\hat{\pi}, p)(\{\eta_0(p; i_0) \in \underline{y}_0, u_0 \in \underline{c}_0, \dots, \eta_{k+1}(p; i_{k+1}) \in \underline{y}_{k+1}, u_{k+1} \in \underline{c}_{k+1}\}) = \\ = \int \{\eta_0(p; i_0) \in \underline{y}_0, u_0 \in \underline{c}_0, \dots, \eta_k(p; i_k) \in \underline{y}_k, u_k \in \underline{c}_k\} \times \\ \times \int_{\underline{y}_{k+1}} \hat{\mu}_{k+1}(\underline{c}_{k+1} | y_{k+1}) \hat{t}_k(dy_{k+1} | \eta_k(p; i_k), u_k) dP_k(\hat{\pi}, p) = \\ = \int_{\underline{y}_0 \underline{c}_0 \dots \underline{y}_k \underline{c}_k} \int_{\underline{y}_{k+1}} \hat{\mu}_{k+1}(\underline{c}_{k+1} | y_{k+1}) \hat{t}_k(dy_{k+1} | y_k, u_k) d\hat{P}_k[\hat{\pi}, \varphi(p)] = \\ = \hat{P}_{k+1}[\hat{\pi}, \varphi(p)](\underline{y}_0 \underline{c}_0 \dots \underline{y}_{k+1} \underline{c}_{k+1}). \quad \square$$

Как было отмечено ранее, (PSI) — это модель такого типа, который был рассмотрен в разделе 10.1. Условия (F^+) и (F^-) из раздела 10.1, отнесенные к модели (PSI), будут обозначаться соответственно как $(\hat{F}^+)$ и $(\hat{F}^-)$. Эти условия не следует путать с условиями (F^+) и (F^-) для модели (ISI), введенными в этом разделе. В конкретных случаях часто удается установить связь между этими условиями конечности для двух рассматриваемых моделей. В общем случае эта связь неясна. Отметим, однако, что если функция g ограничена снизу или сверху, то для модели (ISI) выполняется соответственно условие (F^+) или (F^-) , и если дана какая-либо достаточная статистика, то соответствующая функция $\hat{g}_k$ может быть выбрана так, чтобы она была ограничена соответственно снизу или сверху. Если какой-либо результат справедлив при условиях (F^+) для

^{*} В этом контексте мы считаем $\{\eta_0(p; i_0) \in \underline{y}_0, u_0 \in \underline{c}_0, \dots, \eta_k(p; i_k) \in \underline{y}_k, u_k \in \underline{c}_k\} = \{(x_0, z_0, u_0, \dots, x_k, z_k, u_k) | \eta_0(p; i_0) \in \underline{y}_0, u_0 \in \underline{c}_0, \dots, \eta_k(p; i_k) \in \underline{y}_k, u_k \in \underline{c}_k, \text{ где } i_j = (z_0, u_0, \dots, u_{j-1}, z_j)\}$. Мы будем часто использовать это обозначение для множества, которое зависит от функций некоторых или всех компонент декартова произведения.

модели (ISI) и $(\hat{F}^+)$ для модели (PSI), то будет использоваться обозначение $(F^+, \hat{F}^+)$. Обозначение $(F^-, \hat{F}^-)$ имеет аналогичный смысл.

Если $N = \infty$, то будем рассматривать условия (P), (N) и (D) для модели (ISI) и соответствующие условия $(\hat{P})$, $(\hat{N})$ и $(\hat{D})$ для модели (PSI). Однако в этом случае, если выполняется условие (P) для модели (ISI) и существуют полуаналитические снизу функции $\hat{g}_k: \Gamma_k \rightarrow [-\infty, \infty]$, удовлетворяющие равенству (23), то без потери общности можно предположить, что $\hat{g}_k \geq 0$ для любого номера k , т.е. для модели (PSI) выполняется условие $(\hat{P})$. Точно так же, если для модели (ISI) выполняется условие (N) или (D), то без ограничения общности мы можем предполагать выполнение соответственно условий $(\hat{N})$ или $(\hat{D})$ для модели (PSI). Подобно случаю конечного горизонта, мы принимаем обозначения $(P, \hat{P})$, $(N, \hat{N})$ и $(D, \hat{D})$ для записи тех комбинаций условий на модели, при которых верны те или иные утверждения.

Из раздела 10.1 следует, что при выполнении условия $(\hat{F}^+)$, $(\hat{F}^-)$, $(\hat{P})$, $(\hat{N})$ или $(\hat{D})$ издержки, соответствующие стратегии $\hat{\pi}$, в модели (PSI) в состоянии $y \in Y_0$ (начиная с нулевого шага) равны

$$\hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_{Y_0 C_0 \dots Y_k C_k} \hat{g}_k(y_k, u_k) d\hat{P}_k(\hat{\pi}, p_y), \quad (31)$$

где N может принимать значение, равное бесконечности. Оптимальные издержки в модели (PSI) в точке $y \in Y_0$ (начиная с нулевого шага) определяются соотношением

$$\hat{J}_N^*(y) = \inf_{\hat{\pi} \in \hat{\Pi}} \hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y). \quad (32)$$

Оставшаяся часть этого раздела посвящена установлению связей между издержками, оптимальными издержками и оптимальными и почти оптимальными стратегиями в моделях (ISI) и (PSI).

Предложение 10.2. $(F^+, \hat{F}^+)$, $(F^-, \hat{F}^-)$, $(P, \hat{P})$, $(N, \hat{N})$, $(D, \hat{D})$ Для любых мер $p \in P(S)$ и стратегии $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}$ имеем

$$J_{N, \hat{\pi}}(p) = \int \hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y_0) \varphi(y_0) dy_0. \quad (33)$$

Доказательство. Из соотношений (31), (28), (23), (18), (19) и леммы 10.1 получим

$$\begin{aligned} \int \hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y) \varphi(y) dy &= \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_{Y_0} \int_{Y_0 C_0 \dots Y_k C_k} \hat{g}_k(y_k, u_k) d\hat{P}_k(\hat{\pi}, p_y) \varphi(y) dy = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_{Y_0 C_0 \dots Y_k C_k} \hat{g}_k(y_k, u_k) d\hat{P}_k[\hat{\pi}, \varphi(p)] = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \int_{H_k} g(x_k, u_k) dP_k(\hat{\pi}, p) = J_{N, \hat{\pi}}(p), \end{aligned}$$

где условие (F^+) или (F^-) используется для обоснования перемены порядка интегрирования и суммирования при $N < \infty$, а в случае $N = \infty$ используется теорема о монотонном или ограниченном предельном переходе под знаком интеграла. $\square$

Следствие 10.2.1. $(F^+, \hat{F}^+), (F^-, \hat{F}^-), (P, \hat{P}), (N, \hat{N}), (D, \hat{D})$ Для любой меры $p \in P(S)$ выполняется неравенство

$$J_N^*(p) \leq \int_{Y_0} \hat{J}_N^*(y_0) \varphi(p)(dy_0). \quad (34)$$

Доказательство. Функция $\hat{J}_N^*(y_0)$ является полуаналитической снизу, поэтому интеграл в неравенстве (34) определен. Из предложения 10.2 имеем

$$J_N^*(p) = \inf_{\pi \in \Pi} J_{N,\pi}(p) \leq \inf_{\hat{\pi} \in \hat{\Pi}} \int_{Y_0} \hat{J}_{N,\hat{\pi}}^*(y_0) \varphi(p)(dy_0),$$

поэтому достаточно показать, что

$$\inf_{\hat{\pi} \in \hat{\Pi}} \int_{Y_0} \hat{J}_{N,\hat{\pi}}^*(y_0) \varphi(p)(dy_0) = \int_{Y_0} \hat{J}_N^*(y_0) \varphi(p)(dy_0). \quad (35)$$

Это следует из леммы 8.6 и следствия 9.5.2. $\square$

Теперь мы хотим установить связь, аналогичную соотношению (33), между оптимальными функциями издержек в моделях (ISI) и (PSI). Ввиду следствия 10.2.1 достаточно показать, что для любой заданной стратегии в модели (ISI) можно найти не худшую стратегию в модели (PSI). Это делается в следующей лемме, а аналог соотношения (33) является частью предложения 10.3.

Лемма 10.2. $(F^+, \hat{F}^+), (F^-, \hat{F}^-), (P, \hat{P}), (N, \hat{N}), (D, \hat{D})$ Для любых меры $p \in P(S)$ и стратегии $\pi \in \Pi$ существует стратегия $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}$ такая, что

$$J_{N,\pi}(p) = \int_{Y_0} \hat{J}_{N,\hat{\pi}}(y_0) \varphi(p)(dy_0). \quad (36)$$

Доказательство. Пусть заданы мера $p \in P(S)$ и стратегия $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi$. Пусть для $k = 0, \dots, N-1$ вероятностная мера $Q_k(\pi, p)$ на $Y_k C_k$ задается на измеримых прямоугольниках формулой

$$Q_k(\pi, p)(\underline{Y}_k \underline{C}_k) = P_k(\pi, p)(\{\eta_k(p; i_k) \in \underline{Y}_k, u_k \in \underline{C}_k\}). \quad (37)$$

Существует измеримое по Борелю стохастическое ядро $\hat{\mu}_k(du_k | y_k)$ на C_k при условии Y_k такое, что для любого борелевского множества $B \subset Y_k C_k$ имеем

$$Q_k(\pi, p)(B) = \int_{Y_k C_k} \hat{\mu}_k(B_{y_k} | y_k) dQ_k(\pi, p). \quad (38)$$

В частности,

$$\begin{aligned} 1 &= P_k(\pi, p)(\{i_k, u_k\} \in \Gamma_k) = P_k(\pi, p)(\{\eta_k(p; i_k), u_k\} \in \hat{\Gamma}_k) = \\ &= Q_k(\pi, p)(\hat{\Gamma}_k) = \int_{Y_k C_k} \hat{\mu}_k(\hat{\Gamma}_k | y_k) dQ_k(\pi, p), \end{aligned}$$

поэтому, изменяя в случае необходимости ядро $\hat{\mu}_k(du_k | y_k)$ на множестве меры нуль, мы можем предполагать, что соотношение (38) выполняется и $\hat{\mu}_k(\hat{\Gamma}_k | y_k) = 1$ при любом $y_k \in Y_k$. Пусть $\hat{\pi} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{N-1})$. Тогда $\hat{\pi}$ является марковской стратегией в модели (PSI).

Покажем по индукции, что для множеств $\underline{Y}_k \in B_{Y_k}$, $\underline{C}_k \in B_{C_k}$, $k = 0, \dots, N-1$, выполняется равенство

$$Q_k(\pi, p)(\underline{Y}_k \underline{C}_k) = \hat{P}_k[\hat{\pi}, \varphi(p)](\{y_k \in \underline{Y}_k, u_k \in \underline{C}_k\}). \quad (39)$$

Из соотношений (26) и (37) видно, что проекция меры $Q_0(\pi, p)$ на Y_0 равна $\varphi(p)$. Уравнение (39) для $k = 0$ следует из соотношений (28) и (38). Предположим, что (39) справедливо для k , и покажем, что оно верно для

$k+1$. Из соотношений (38), (37) и (22), а также из предположения индукции получаем

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1}(\pi, \rho) (\underline{Y}_{k+1} \underline{C}_{k+1}) &= \\
 &= \int_{\underline{Y}_{k+1} \underline{C}_{k+1}} \hat{\mu}_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | \gamma_{k+1}) dQ_{k+1}(\pi, \rho) = \\
 &= \int_{\{\eta_{k+1}(\rho; i_{k+1}) \in \underline{Y}_{k+1}\}} \hat{\mu}_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | \eta_{k+1}(\rho; i_{k+1})) dP_{k+1}(\pi, \rho) = \\
 &= \int_{H_k} \int_{\underline{Y}_{k+1}} \hat{\mu}_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | \gamma_{k+1}) \hat{t}_k(d\gamma_{k+1} | \eta_k(\rho; i_k), u_k) dP_k(\pi, \rho) = \\
 &= \int_{Y_k C_k} \int_{\underline{Y}_{k+1}} \hat{\mu}_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | \gamma_{k+1}) \hat{t}_k(d\gamma_{k+1} | \gamma_k, u_k) dQ_k(\pi, \rho) = \\
 &= \int_{Y_0 C_0 \dots Y_k C_k} \int_{\underline{Y}_{k+1}} \hat{\mu}_{k+1}(\underline{C}_{k+1} | \gamma_{k+1}) \hat{t}_k(d\gamma_{k+1} | \gamma_k, u_k) \times \\
 &\times d\hat{P}_k[\hat{\pi}, \varphi(\rho)] = P_{k+1}[\hat{\pi}, \varphi(\rho)] (\{\gamma_{k+1} \in \underline{Y}_{k+1}, u_k \in \underline{C}_{k+1}\}).
 \end{aligned}$$

Из равенств (37) и (39), вместе взятых, следует, что для множеств $\underline{Y}_k \in B_{Y_k}$, $\underline{C}_k \in B_C$, $k = 0, \dots, N-1$, имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
 P_k(\pi, \rho) (\{\eta_k(\rho; i_k) \in \underline{Y}_k, u_k \in \underline{C}_k\}) &= \\
 &= \hat{P}_k[\hat{\pi}, \varphi(\rho)] (\{\gamma_k \in \underline{Y}_k, u_k \in \underline{C}_k\}).
 \end{aligned} \tag{40}$$

Далее остается повторить доказательство предложения 10.2, только вместо леммы 10.1 нужно воспользоваться формулой (40). $\square$

Определение 10.8. Для любых меры $q \in P(Y_0)$ и числа $\epsilon > 0$ стратегия $\hat{\pi} \in \hat{\Pi}'$ называется *слабо q - ϵ -оптимальной*, если

$$\int_{Y_0} \hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y_0) q(dy_0) \leq \begin{cases} \int_{Y_0} \hat{J}_N^*(y_0) q(dy_0) + \epsilon & \text{при } \int_{Y_0} \hat{J}_N^*(y_0) q(dy_0) > -\infty, \\ -1/\epsilon & \text{при } \int_{Y_0} \hat{J}_N^*(y_0) q(dy_0) = -\infty. \end{cases}$$

Стратегия $\hat{\pi}$ называется *q -оптимальной*, если

$$q(\{y_0 \in Y_0 | \hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y_0) = \hat{J}_N^*(y_0)\}) = 1.$$

Уравнение (35) показывает, что для любых заданных меры $\rho \in P(S)$ и числа $\epsilon > 0$ существует слабо $\varphi(\rho)$ - ϵ -оптимальная марковская стратегия. В следующем предложении показывается, что такая стратегия является ϵ -оптимальной в точке ρ , если она рассматривается как стратегия в модели (ISI).

Предложение 10.3. $(F^+, \hat{F}^+)$ $(F^-, \hat{F}^-)$ $(P, \hat{P})$ $(N, \hat{N})$ $(D, \hat{D})$ Справедливо соотношение

$$J_N^*(\rho) = \int_{Y_0} \hat{J}_N^*(y_0) \varphi(\rho) (dy_0) \quad \forall \rho \in P(S). \tag{41}$$

Далее, если стратегия $\hat{\pi}$ является оптимальной, $\varphi(p)$ -оптимальной или слабо $\varphi(p)$ - ϵ -оптимальной в модели (PSI), то она является соответственно оптимальной, оптимальной в точке p или ϵ -оптимальной в точке p и в модели (ISI). Если стратегия $\hat{\pi}$ является ϵ -оптимальной для модели (PSI) и выполняется условие $(F^+, \hat{F}^+)$, $(P, \hat{P})$ или $(D, \hat{D})$, то она является также ϵ -оптимальной в модели (ISI).

Доказательство. Уравнение (41) следует из следствия 10.2.1 и леммы 10.2. Пусть стратегия $\hat{\pi}$ является ϵ -оптимальной в модели (PSI). Ясно, что в случаях $(P, \hat{P})$ и $(D, \hat{D})$ имеет место неравенство

$$\hat{J}_N^*(y_0) > -\infty \quad \forall y_0 \in Y_0, \quad (42)$$

поэтому

$$\hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y_0) \leq \hat{J}_N^*(y_0) + \epsilon \quad \forall y_0 \in Y_0. \quad (43)$$

При условии $(F^+, \hat{F}^+)$ неравенство (42) получается из леммы 8.3 и предложения 8.2, поэтому неравенство (43) выполняется и в этом случае. Из соотношения (41) и предложения 10.2 имеем

$$\begin{aligned} J_{N, \hat{\pi}}(p) &= \int_{Y_0} \hat{J}_{N, \hat{\pi}}(y_0) \varphi(p) (dy_0) \leq \\ &\leq \int_{Y_0} \hat{J}_N^*(y_0) \varphi(p) (dy_0) + \epsilon = J_N^*(p) + \epsilon \quad \forall p \in P(S), \end{aligned}$$

поэтому стратегия $\hat{\pi}$ является ϵ -оптимальной в модели (ISI). Остальные утверждения предложения следуют из соотношения (41) и предложения 10.2. $\square$

Мы скоро покажем, что достаточные статистики всегда существуют и, более того, во многих случаях их можно выбрать так, чтобы модель (PSI) была стационарной. Существование такой статистики в модели (ISI) и вытекающее отсюда существование соответствующей модели (PSI) позволяют нам воспользоваться результатами глав 8 и 9. Например, справедливо следующее предложение.

Предложение 10.4. $(F^+, \hat{F}^+)$ $(F^-, \hat{F}^-)$ $(P, \hat{P})$ $(N, \hat{N})$ $(D, \hat{D})$ Если последовательность $(\eta_0, \dots, \eta_{N-1})$ представляет собой достаточную статистику в модели (ISI), то для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная нерандомизированная стратегия в модели (ISI), которая зависит от вектора $i_k = (z_0, u_0, \dots, u_{k-1}, z_k)$ только через посредство функций $\eta_k(p; i_k)$, т.е. имеет вид

$$\pi = (\mu_0[p; \eta_0(p; i_0)], \dots, \mu_{N-1}[p; \eta_{N-1}(p; i_{N-1})]). \quad (44)$$

При выполнении условия $(F^+, \hat{F}^+)$, $(P, \hat{P})$ или $(D, \hat{D})$ мы можем выбрать эту ϵ -оптимальную стратегию в более простом виде

$$\hat{\pi} = (\hat{\mu}_0[\eta_0(p; i_0)], \dots, \hat{\mu}_{N-1}[\eta_{N-1}(p; i_{N-1})]). \quad (45)$$

Доказательство. При выполнении условия $(F^-, \hat{F}^-)$, $(P, \hat{P})$ или $(D, \hat{D})$ в модели (PSI) существует ϵ -оптимальная нерандомизированная марковская стратегия $\hat{\pi} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{N-1})$ (предложения 8.3 и 9.19). В силу предложения 10.3 эта стратегия является ϵ -оптимальной в модели (ISI), тем самым доказана вторая часть предложения.

Предположим, что выполняется условие $(F^-, \hat{F}^-)$, и пусть $\{\epsilon_n\}$ -последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ и $\epsilon_n \downarrow 0$. Пусть

$\hat{\pi}_n = (\hat{\mu}_0^n, \dots, \hat{\mu}_{N-1}^n)$ является последовательностью нерандомизированных марковских стратегий в модели (PSI), обладающая $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности (предложение 8.4). В силу предложения 10.2 и условия $(F^-, \hat{F}^-)$ имеем

$$\int_{Y_0} \hat{J}_{N, \hat{\pi}_n}(y_0) \varphi(p) (dy_0) = J_{N, \hat{\pi}_n}(p) < \infty \quad \forall p \in P(S).$$

Так как

$$\hat{J}_{N, \hat{\pi}_n}(y_0) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \epsilon_k \downarrow \hat{J}_N^*(y_0) \quad \forall y_0 \in Y_0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Y_0} \hat{J}_{N, \hat{\pi}_n}(y_0) \varphi(p) (dy_0) = \int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) \varphi(p) (dy_0) \quad \forall p \in P(S).$$

Пусть задано число $\epsilon > 0$, и пусть $n(p)$ — наименьшее положительное целое число, для которого

$$\int_{Y_0} \hat{J}_{N, \hat{\pi}_n}(y_0) \varphi(p) (dy_0) \leq \begin{cases} \int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) \varphi(p) (dy_0) + \epsilon, & \text{если } \int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) \varphi(p) (dy_0) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } \int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) \varphi(p) (dy_0) = -\infty. \end{cases}$$

Положим $\mu_k(p; y_k) = \hat{\mu}_k^{(p)}(y_k)$, $k = 0, \dots, N-1$. Тогда в силу предложений 10.2 и 10.3 стратегия π , заданная равенством (44), является ϵ -оптимальной нерандомизированной стратегией для модели (ISI).

Предположим, что выполняется условие $(N, \hat{N})$. Рассмотрим нестационарную модель стохастического оптимального управления (NPSI), в которой пространство начальных состояний есть $P(Y_0)$, пространство начальных управлений — одноточечное множество $\{u_0\}$, начальная функция издержек $-g_0(q, u_0) = 0$ для любой меры $q \in P(Y_0)$ и начальное переходное ядро задается равенством $t(dy_0 | q, u_0) = q(dy_0)$ для любой меры $q \in P(Y_0)$. Пространство состояний и управлений, ограничение управления, функция издержек и переходное ядро в модели (PSI) на $(k+1)$ -м шаге — это соответственно $Y_k, C, \hat{U}_k, \hat{g}_k$ и $\hat{t}_k(dy_{k+1} | y_k, u_k)$, $k \geq 0$. Коэффициент дисконтирования равен α , а горизонт бесконечен. По определению оптимальные издержки в модели (NPSI) для меры $q \in P(Y_0)$ равны

$$\inf_{\hat{\pi} \in \hat{\Pi}} \int_{Y_0} \hat{J}_{\hat{\pi}}^*(y_0) q(dy_0),$$

а в силу следствий 9.1.1 и 9.5.2 написанное выражение равно

$$\int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) q(dy_0).$$

Модель (NPSI) имеет неположительную функцию издержек за один шаг, поэтому в силу предложения 9.20 для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная нерандомизированная полумарковская стратегия

$$\bar{\pi} = (\bar{\mu}(q), \bar{\mu}_0(q; y_0), \bar{\mu}_1(q; y_1), \dots).$$

Пусть для фиксированной меры $q \in P(Y_0)$ стратегия $\hat{\pi}$ в модели (PSI) задается равенством

$$\hat{\pi}(q) = (\bar{\mu}_0(q; y_0), \bar{\mu}_1(q; y_1), \dots).$$

Тогда выполняется неравенство

$$\int_{Y_0} \hat{J}_{\hat{\pi}(q)}(y_0) q(dy_0) \leq \begin{cases} \int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) q(dy_0) + \epsilon, & \text{если } \int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) q(dy_0) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } \int_{Y_0} \hat{J}^*(y_0) q(dy_0) = -\infty, \end{cases}$$

т.е. стратегия $\hat{\pi}(q)$ является слабо q - ϵ -оптимальной в модели (PSI). В силу предложения 10.3 стратегия π , определенная равенством (44), где $\mu_k(p; y_k) = \bar{\mu}(\varphi(p); y_k)$ является ϵ -оптимальной в модели (ISI). $\square$

Другие частные результаты, которые могут быть получены для модели (ISI) из результатов глав 8 и 9, очевидны, и мы не будем их все перечислять. Мы ограничимся описанием алгоритма динамического программирования для случая конечного горизонта.

В силу предложения 8.2 при условиях $(F^+, \hat{F}^+)$ или $(F^-, \hat{F}^-)$ алгоритм динамического программирования выглядит следующим образом (для простоты обозначений мы предполагаем модель (PSI) стационарной):

$$\hat{J}_0^*(y) = 0 \quad \forall y \in Y, \quad (46)$$

$$\hat{J}_{k+1}^*(y) = \inf_{u \in \hat{U}(y)} \{ \hat{g}(y, u) + \alpha \int \hat{J}_k^*(y') \hat{t}(dy' | y, u) \}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (47)$$

Если в выражении (47) инфимум достигается для любых состояния y и числа $k = 0, \dots, N-1$, то существуют универсально измеримые функции

$\hat{\mu}_k: Y \rightarrow C$ такие, что для любых y и $k = 0, \dots, N-1$ $\hat{\mu}_k(y) \in \hat{U}(y)$ и функция $\hat{\mu}_k(y)$ доставляет инфимум в (47). Тогда стратегия $\hat{\pi} = (\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{N-1})$ является оптимальной в модели (PSI) (предложение 8.5), поэтому она является оптимальной также и в модели (ISI) (предложение 10.3).

Если условие $(F^+, \hat{F}^+)$ выполняется, а инфимум в (47) достигается не при всех y и $k = 0, \dots, N-1$, то алгоритм динамического программирования (46) и (47) можно тем не менее применять так, как это делается в предложении 8.3, для построения ϵ -оптимальной нерандомизированной марковской стратегии $\hat{\pi}$ в модели (PSI). Из предложения 10.3 видно, что стратегия $\hat{\pi}$ будет также ϵ -оптимальной и в модели (ISI).

Во многих случаях $\eta_{k+1}(p; i_{k+1})$ представляет собой функцию от $\eta_k(p; i_k)$, u_k и z_k . В этом случае порядок вычислений следующий. Сперва с помощью уравнений (46) и (47) строится последовательность $(\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{N-1})$, затем по начальному распределению и начальному наблюдению находится $y_0 = \eta_0(p; i_0)$ и применяется управление $u_0 = \hat{\mu}_0(y_0)$. При известных уже y_k, u_k и z_k вычисляется y_{k+1} и применяется управление $u_{k+1} = \hat{\mu}_{k+1}(y_{k+1})$, $k = 0, \dots, N-2$. Таким образом, информация, содержащаяся в $(p; i_k)$, конденсируется в y_k . Это сосредоточение информации исторически и привело к понятию достаточной статистики.

10.3. Существование достаточных статистик

Обратимся к вопросу о существовании достаточной статистики. Не будем удивляться тому, что достаточной статистикой является последовательность тождественных отображений $P(S)/_k$ на себя, $k = 0, \dots, N-1$ (предложение 10.6). Хотя подобная статистика не конденсирует информацию, ее пока достаточно для обоснования нашего анализа. Мы покажем,

что если множества ограничений Γ_k равны $I_k C$, $k = 0, \dots, N-1$, то функции, отображающие $P(S)/k$ в условные распределения состояния x_k относительно $(p; i_k)$, образуют достаточную статистику (предложение 10.5). Эта статистика обладает тем свойством, что ее значение на $(k+1)$ -м шаге является функцией от ее значения на k -м шаге, u_k и z_{k+1} см. (52), поэтому она на самом деле конденсирует информацию. Она также приводит нас к стационарной модели с полной информацией, и если условные распределения могут быть охарактеризованы конечным набором параметров, то может привести к существенному упрощению вычислений. Так будет, например, если заранее известно, что все эти распределения гауссовские.

10.3.1. Фильтрация и условные распределения состояний

Изучение фильтрации опирается на следующую основную лемму.

Лемма 10.3. Рассмотрим модель (IS1). Существуют борелевские стохастические ядра $r_0(dx_0 | p; z_0)$ на S при условии $P(S)Z$ и $r(dx | p; u, z)$ на S при условии $P(S)CZ$ такие, что

$$\int_{\underline{S}_0} s_0(\underline{Z}_0 | x_0) p(dx_0) = \int_{\underline{S}} \int_{\underline{Z}_0} r_0(\underline{S}_0 | p; z_0) s_0(dz_0 | x_0) p(dx_0) \\ \forall \underline{S}_0 \in \mathcal{B}_S, \underline{Z}_0 \in \mathcal{B}_Z, p \in P(S), \quad (48)$$

$$\int_{\underline{S}} s(\underline{Z}, u, x) p(dx) = \int_{\underline{S}} \int_{\underline{Z}} r(\underline{S} | p; u, z) s(dz | u, x) p(dx) \\ \forall \underline{S} \in \mathcal{B}_S, \underline{Z} \in \mathcal{B}_Z, p \in P(S), u \in C. \quad (49)$$

Доказательство. Для фиксированной пары $(p; u) \in P(S)C$ определим вероятностную меру q на множестве SZ , задавая ее значения на измеримых прямоугольниках формулой (предложение 7.28)

$$q(\underline{SZ} | p; u) = \int_{\underline{S}} s(\underline{Z} | u, x) p(dx).$$

В силу предложений 7.26 и 7.29 $q(d(x, z) | p; u)$ является борелевским стохастическим ядром на SZ при условии $P(S)C$. По следствию 7.27.1 это стохастическое ядро можно разложить на его проекцию на Z при условии $P(S)C$ и борелевское стохастическое ядро $r(dx | p; u, z)$ на S при условии $P(S)CZ$ так, что выполняется равенство (49). Аналогично доказывается существование ядра $r_0(dx_0 | p; z_0)$. $\square$

Обычно p , заданное распределение состояния x_0 , называют *априорным распределением* начального состояния. После того как наблюдалось состояние z_0 , распределение x_0 обновляется, т.е. находится распределение состояния x_0 , обусловленное z_0 . Такое обновление распределение называется *апостериорным распределением* и, как мы покажем в лемме 10.4, оно как раз и есть $r_0(dx_0 | p; z_0)$. На k -м шаге, $k \geq 1$, будем иметь некоторое априорное распределение p'_k состояния x_k , основанное на векторе $i_{k-1} = (z_0, u_0, \dots, u_{k-2}, z_{k-1})$. После применения управления u_{k-1} и наблюдения некоторого состояния z_k вычисляется апостериорное распределение состояния x_k , обусловленное набором (i_{k-1}, u_{k-1}, z_k) . Мы далее покажем, что это распределение и есть $r(dx | p'_k; u_{k-1}, z_k)$. Процесс перехода от априорного распределения к апостериорному, осуществляемый таким способом, называется *фильтрацией*, и он формализуется следующим образом.

Рассмотрим функцию $f: P(S)C \rightarrow P(S)$, определяемую формулой

$$\bar{f}(p, u)(\underline{S}) = \int_{\underline{S}} t(\underline{S} | x, u) p(dx) \quad \forall \underline{S} \in \mathcal{B}_S. \quad (50)$$

Уравнение (50) называется *уравнением прогноза на один шаг*. Если состояние x_k имело апостериорное распределение p_k и выбрано управление u_k , то априорное распределение состояния x_{k+1} будет $\bar{f}(p_k, u_k)$. Отображение $\bar{f}$ измеримо по Борелю (предложения 7.26 и 7.29).

Если задана последовательность векторов $i_k \in I_k$ такая, что $i_{k+1} = (i_k, u_k, z_{k+1})$, $k = 0, \dots, N-2$, и задана мера $p \in P(S)$, то определим рекуррентно меры

$$p_0(p; i_0) = r_0(dx_0 | p; z_0), \quad (51)$$

$$p_{k+1}(p; i_{k+1}) = r(dx | \bar{f}[p_k(p; i_k), u_k]; u_k, z_{k+1}), \quad k = 0, \dots, N-2. \quad (52)$$

Заметим, что для любого k функция $p_k: P(S) | I_k \rightarrow P(S)$ измерима по Борелю. Уравнения (48)–(52) называются *уравнениями фильтрации*, соответствующими модели (IS1). Как показывает следующая лемма, для заданных начального распределения и стратегии они порождают условные распределения состояния с учетом текущей информации.

Лемма 10.4. Пусть дана модель (IS1). Для любых $p \in P(S)$, $\pi = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1}) \in \Pi$ и $\underline{S}_k \in B_S$ равенство

$$P_k(\pi, p)[x_k \in \underline{S}_k | i_k] = p_k(p; i_k)(\underline{S}_k) \quad (53)$$

выполняется для почти всех по мере $P_k(\pi, p)$ векторов i_k , $k = 0, \dots, N-1$.

Доказательство *). Проведем доказательство по индукции. Для любых множеств $\underline{S}_0 \in B_S$ и $\underline{Z}_0 \in B_Z$ из равенств (51), (16) и (48) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\{z_0 \in \underline{Z}_0\}} p_0(p; z_0)(\underline{S}_0) dP_0(\pi, p) = \\ & = \int_{\{z_0 \in \underline{Z}_0\}} r_0(\underline{S}_0 | p; z_0) dP_0(\pi, p) = \\ & = \int_{\underline{S}_0} \int_{\underline{Z}_0} r_0(\underline{S}_0 | p; z_0) s_0(dz_0 | x_0) p(dx_0) = \int_{\underline{S}_0} s_0(\underline{Z}_0 | x_0) p(dx_0) = \\ & = P_0(\pi, p)(\{x_0 \in \underline{S}_0, z_0 \in \underline{Z}_0\}). \end{aligned} \quad (54)$$

Уравнение (53) для $k=0$ следует из соотношения (54) и определения условной вероятности.

Предположим теперь, что уравнение (53) справедливо для k . Для любых множеств $I_k \in B_{I_k}$, $C_k \in B_C$, $Z_{k+1} \in B_Z$ и $\underline{S}_{k+1} \in B_S$ из равенства (16), предположения индукции, теоремы Фубини и соотношений (50), (52) и (49) следует

$$\begin{aligned} & \int_{\{i_k \in I_k, u_k \in C_k, z_{k+1} \in Z_{k+1}\}} p_{k+1}(p; i_k, u_k, z_{k+1})(\underline{S}_{k+1}) dP_{k+1}(\pi, p) = \\ & = \int_{\{i_k \in I_k\}} \int_{C_k} \int_{S_{k+1}} \int_{Z_{k+1}} p_{k+1}(p; i_k, z_{k+1})(\underline{S}_{k+1}) s(dz_{k+1} | u_k, x_{k+1}) \times \\ & \times t(dx_{k+1} | x_k, u_k) \mu_k(du_k | p; i_k) dP_k(\pi; p) = \end{aligned}$$

* В этом и последующих доказательствах читателю могут оказаться полезными сведения об условных математических ожиданиях и вероятностях, приведенные в начале раздела 10.2.

$$\begin{aligned}
&= \int_{\{i_k \in \underline{I}_k\}} \int_{S_k} \int_{C_k} \int_{S_{k+1}} \int_{Z_{k+1}} p_{k+1}(p; i_k, u_k, z_{k+1}) (\underline{S}_{k+1}) \times \\
&\quad \times s(dz_{k+1} | u_k, x_{k+1}) \times \\
&\quad \times t(dx_{k+1} | x_k, u_k) \mu_k(du_k | p; i_k) [p_k(p; i_k)(dx_k)] dP_k(\pi, p) = \\
&= \int_{\{i_k \in \underline{I}_k\}} \int_{C_k} \int_{S_k} \int_{S_{k+1}} \int_{Z_{k+1}} p_{k+1}(p; i_k, u_k, z_{k+1}) (\underline{S}_{k+1}) \times \\
&\quad \times s(dz_{k+1} | u_k, x_{k+1}) \times \\
&\quad \times t(dx_{k+1} | x_k, u_k) [p_k(p; i_k)(dx_k)] \mu_k(du_k | p; i_k) dP_k(\pi, p) = \\
&= \int_{\{i_k \in \underline{I}_k\}} \int_{C_k} \int_{S_{k+1}} \int_{Z_{k+1}} r(\underline{S}_{k+1} | \bar{f}[p_k(p; i_k), u_k]; u_k; z_{k+1}) \times \\
&\quad \times s(dz_{k+1} | u_k, x_{k+1}) \bar{f}[p_k(p; i_k), u_k] (dx_{k+1}) \times \\
&\quad \times \mu_k(du_k | p; i_k) dP_k(\pi, p) = \int_{\{i_k \in \underline{I}_k\}} \int_{C_k} \int_{S_{k+1}} s(\underline{Z}_{k+1} | u_k, x_{k+1}) \times \\
&\quad \times \bar{f}[p_k(p; i_k), u_k] (dx_{k+1}) \mu_k(du_k | p; i_k) dP_k(\pi, p) = \\
&= \int_{\{i_k \in \underline{I}_k\}} \int_{C_k} \int_{S_k} \int_{S_{k+1}} s(\underline{Z}_{k+1} | u_k, x_{k+1}) t(dx_{k+1} | x_k, u_k) \times \\
&\quad \times [p_k(p; i_k)(dx_k)] \mu_k(du_k | p; i_k) dP_k(\pi, p) = \\
&= \int_{\{i_k \in \underline{I}_k\}} \int_{S_k} \int_{C_k} \int_{S_{k+1}} s(\underline{Z}_{k+1} | u_k, x_{k+1}) t(dx_{k+1} | x_k, u_k) \times \\
&\quad \times \mu_k(du_k | p; i_k) [p_k(p; i_k)(dx_k)] dP_k(\pi, p) = \\
&= \int_{\{i_k \in \underline{I}_k\}} \int_{C_k} \int_{S_{k+1}} s(\underline{Z}_{k+1} | u_k, x_{k+1}) t(dx_{k+1} | x_k, u_k) \times \\
&\quad \times \mu_k(du_k | p; i_k) dP_k(\pi, p) = \\
&= p_{k+1}(\pi, p) (\{i_k \in \underline{I}_k, u_k \in \underline{C}_k, x_{k+1} \in \underline{S}_{k+1}, z_{k+1} \in \underline{Z}_{k+1}\}). \quad (55)
\end{aligned}$$

Из соотношения (55) и определения условной вероятности вытекает, что равенство

$$p_{k+1}(\pi, p) [x_{k+1} \in \underline{S}_{k+1} | i_{k+1}] = p_{k+1}(p; i_{k+1}) (\underline{S}_{k+1})$$

выполняется для почти всех по мере $p_{k+1}(\pi, p)$ векторов i_k ; этим завершается переход от k к $k+1$. □

Предложение 10.5. Рассмотрим модель (ISI) и предположим, что $U_k(x) = C$ для любого $x \in S$ и $k = 0, \dots, N-1$. Тогда последовательность $[p_0(p; i_0), \dots, p_{N-1}(p; i_{N-1})]$, определенная уравнениями (51) и (52), представляет собой достаточную статистику, и получающаяся модель с полной информацией является стационарной.

Доказательство. Пусть множество Y_k из определения 10.6 совпадает с $P(S)$, $k = 0, \dots, N-1$. Мы уже знаем, что отображения $p_k : P(S) |_{I_k} \rightarrow P(S)$ измеримы по Борелю, поэтому $(p_0, \dots, p_{N-1})$ яв-

ляется статистикой. Условие (а) определения 10.6 удовлетворяется при $\hat{\Gamma}_k = P(S) C, k = 0, \dots, N-1$.

Для $y \in P(S), u \in C$ и $\underline{Y} \in B_{P(S)}$ определим

$$\underline{Z}(y, u, \underline{Y}) = \{ z \in Z \mid \int \tilde{f}(y, u); (u, z) \in \underline{Y} \},$$

$$\hat{t}(\underline{Z} \mid y, u) = \int \int_S s[\underline{Z}(y, u, \underline{Y}) \mid u, x'] t(dx' \mid x, u) y(dx). \quad (56)$$

Заметим, что множество $\underline{Z}(y, u, \underline{Y})$ представляет собой (y, u) -сечение прообраза множества $\underline{Y}$ при борелевски измеримом отображении. В силу предложений 7.26 и 7.29 стохастическое ядро

$$\lambda(\underline{Z} \mid x, u) = \int_S s(\underline{Z} \mid u, x') t(dx' \mid x, u)$$

измеримо по Борелю, поэтому в силу тех же предложений измеримым по Борелю является и стохастическое ядро

$$\Lambda(\underline{Z} \mid y, u) = \int \int_S s(\underline{Z} \mid u, x') t(dx' \mid x, u) y(dx) = \int_S \lambda(\underline{Z} \mid x, u) y(dx).$$

Из предложения 7.26 и следствия 7.26.1 вытекает, что $\hat{t}(dy' \mid y, u)$ является борелевским стохастическим ядром на $P(S)$ при условии $P(S)C$. Для $\pi \in \Pi, p \in P(S), \underline{Y} \in B_{P(S)}$ и $k = 0, \dots, N-2$ по лемме 10.4 имеем почти для всех $(\bar{y}_k, \bar{u}_k)$ по мере $P_{k+1}(\pi, p)$

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\pi, p) \{ p_k(p; i_k) \in \underline{Y} \mid p_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k \} &= \\ = P_{k+1}(\pi, p) \{ z_{k+1} \in \underline{Z}(\bar{y}_k, \bar{u}_k, \underline{Y}) \mid p_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k \} &= \\ = E \{ P_{k+1}(\pi, p) \{ z_{k+1} \in \underline{Z}(\bar{y}_k, \bar{u}_k, \underline{Y}) \mid i_k, u_k \} \mid p_k(p; i_k) = & \\ = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k \} = E \left\{ \int \int_S s[\underline{Z}(\bar{y}_k, \bar{u}_k, \underline{Y}) \mid u_k, x_{k+1}] t(dx_{k+1} \mid x_k, u_k) \times \right. & \\ \times [p_k(p; i_k)(dx_k)] \mid p_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k \} = \hat{t}(\underline{Y} \mid \bar{y}_k, \bar{u}_k), & \end{aligned}$$

где математические ожидания берутся по мере $P_{k+1}(\pi, p)$. Таким образом, равенство (22) выполняется.

Для $\pi \in \Pi, p \in P(S)$ и $k = 0, \dots, N-1$ по лемме 10.4 имеем для почти всех $(\bar{y}_k, \bar{u}_k)$ по мере $P_k(\pi, p)$

$$\begin{aligned} E[g(x_k, u_k) \mid p_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k] &= \\ = E \{ E[g(x_k, u_k) \mid i_k, u_k] \mid p_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k \} &= \\ = E \left\{ \int_S g(x_k, u_k) p_k(p; i_k)(dx_k) \mid p_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k \right\} &= \\ = \int_S g(x_k, \bar{u}_k) \bar{y}(dx_k), & \end{aligned} \quad (57)$$

где математические ожидания берутся по мере $P_k(\pi, p)$. Функция $\hat{g}: P(S)C \rightarrow R^*$, определённая формулой

$$\hat{g}(\bar{y}, \bar{u}) = \int_S g(x, \bar{u}) \bar{y}(dx), \quad (58)$$

является полуаналитической снизу (предложение 7.48) и в силу соотношения (57) она удовлетворяет равенству (23). □

Если горизонт конечен, то для вычисления оптимальной функции издержек $\hat{J}_N^*$ в модели (PSI) в алгоритм динамического программирования (46)–(47) можно подставить переходное ядро $\hat{t}$ и функцию издержек за один шаг $\hat{g}$, определенные соотношениями (56) и (58). Оптимальную функцию издержек J_N^* в модели (ISI) можно тогда определить из соотношения (41). Если горизонт бесконечен, то алгоритм динамического программирования (46)–(47) определяет функцию $\hat{J}^*$ при условиях $(\hat{N})$ и $(\hat{D})$ и в некоторых случаях при условии $(\hat{P})$ (предложения 9.14 и 9.17). Нахождение функции J^* по функции $\hat{J}^*$ вновь осуществляется с помощью соотношения (41).

10.3.2. Тожественные отображения

Предложение 10.6. Пусть дана модель (ISI). Последовательность тождественных отображений $P(S)/I_k$ на себя, $k = 0, \dots, N-1$, представляет собой статистику, достаточную для управления.

Доказательство. Пусть множество Y_k из определения 10.6 равно $P(S)/I_k$, $k = 0, \dots, N-1$, и пусть η_k — тождественное отображение $P(S)/I_k$ на себя. Тогда $(\eta_0, \dots, \eta_{N-1})$ представляет собой статистику. Условие (а) определения 10.6 выполняется при $\hat{\Gamma}_k = P(S)/I_k$, $k = 0, \dots, N-1$.

Если $\underline{Y}_{k+1} \in B_{P(S)/I_{k+1}}$, $\bar{y}_k \in P(S)/I_k$ и $\bar{u}_k \in C_k$, то введем обозначение

$$(\underline{Y}_{k+1})_{(\bar{y}_k, \bar{u}_k)} = \{z_{k+1} \in Z \mid (\bar{p}; \bar{z}_0, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{k-1}, \bar{z}_k, \bar{u}_k, z_{k+1}) \in \underline{Y}_{k+1}\},$$

где $\bar{y}_k = (\bar{p}; \bar{z}_0, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_{k-1}, \bar{z}_k)$. Используя это обозначение, определим для $k = 0, \dots, N-2$ стохастические ядра $\hat{t}_k(dy_{k+1} \mid \bar{y}_k, \bar{u}_k)$ на $P(S)/I_{k+1}$ при условии $P(S)/I_k$ формулой

$$\begin{aligned} \hat{t}_k(\underline{Y}_{k+1} \mid \bar{y}_k, \bar{u}_k) &= \int_{S_{k+1}} s[(\underline{Y}_{k+1})_{(\bar{y}_k, \bar{u}_k)} \mid \bar{u}_k, x_{k+1}] t(dx_{k+1} \mid x_k, \bar{u}_k) \times \\ &\times p_k(\bar{y}_k)(dx_k) \quad \forall \underline{Y}_{k+1} \in B_{P(S)/I_{k+1}}, \end{aligned} \quad (59)$$

где мера $p_k(\bar{y}_k)$ задается формулами (51) и (52). С помощью рассуждений, аналогичных тем, что использовались в доказательстве предложения 10.5, можно показать, что ядро $\hat{t}_k$ измеримо по Борелю. При $p \in P(S)$, $\pi \in \Pi$, $\underline{Y}_{k+1} \in B_{P(S)/I_{k+1}}$ и $k = 0, \dots, N-2$ из леммы 10.4 имеем для почти всех $(\bar{y}_k, \bar{u}_k)$ по мере $P_k(\pi, p)$

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\pi, p)[\eta_{k+1}(p; i_{k+1}) \in \underline{Y}_{k+1} \mid \eta_k(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k] &= \\ = P_{k+1}(\pi, p)[(\bar{y}_k, \bar{u}_k, z_{k+1}) \in \underline{Y}_{k+1}] &= \\ = \int_{S_{k+1}} s[(\underline{Y}_{k+1})_{(\bar{y}_k, \bar{u}_k)} \mid \bar{u}_k, x_{k+1}] t(dx_{k+1} \mid x_k, \bar{u}_k) \times \\ \times p_k(\bar{y}_k)(dx_k) &= \hat{t}_k(\underline{Y}_{k+1} \mid \bar{y}_k, \bar{u}_k), \end{aligned}$$

поэтому равенство (22) выполнено.

Для $k = 0, \dots, N-1$ определим функции $\hat{g}_k: P(S) / \mathcal{R}_k C \rightarrow R^*$ формулой

$$\hat{g}_k(\bar{y}_k, \bar{u}_k) = \int_{S_k} g(x_k, \bar{u}_k) p_k(\bar{y}_k)(dx_k). \quad (60)$$

В силу предложения 7.48 функция $\hat{g}_k$ является полуаналитической снизу при любом k . При $p \in P(S)$, $\pi \in \Pi$ и $k = 0, \dots, N-1$ из леммы 10.4 имеем для почти всех $(\bar{y}_k, \bar{u}_k)$ по мере $P_k(\pi, p)$

$$E[g(x_k, u_k) | \eta(p; i_k) = \bar{y}_k, u_k = \bar{u}_k] = \int_{S_k} g(x_k, \bar{u}_k) p_k(\bar{y}_k)(dx_k) = \hat{g}_k(\bar{y}_k, \bar{u}_k),$$

где математическое ожидание берется по мере $P_k(\pi, p)$, поэтому и выполняется и равенство (23). $\square$

Переходные ядра $\hat{t}_k$ и функции издержек за один шаг $\hat{g}_k$, определенные соотношениями (59) и (60), могут использоваться в нестационарном варианте алгоритма динамического программирования (46)–(47) (см. текст вслед за предложением 10.5).

Глава 11

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ ВОПРОСЫ

11.1. Предельно измеримые стратегии

В этом разделе мы усилим результаты раздела 7.7, касающиеся универсально измеримых функций. В частности, мы покажем, что эти результаты остаются справедливыми, если вместо универсально измеримых функций используются предельно измеримые функции (определения Б.2 и Б.3). Это позволит нам заменить все результаты о существовании универсально измеримых стратегий в главах 8 и 9 на более сильные результаты о существовании предельно измеримых стратегий.

Итак, пересмотрим основные результаты раздела 7.7, опираясь на понятия и результаты приложения Б.

Предложение 11.1. Пусть X, Y и Z — борелевские пространства, $D \in \mathcal{L}_X$ и $E \in \mathcal{L}_Y$. Предположим, что функции $f: D \rightarrow Y$ и $g: E \rightarrow Z$ предельно измеримы и $f(D) \subseteq E$. Тогда суперпозиция $g \circ f$ предельно измерима.

Доказательство. Результат вытекает из следствия Б.11.1. $\square$

Следствие 11.1.1. Пусть X и Y — борелевские пространства, $f: X \rightarrow Y$ — некоторая функция, и пусть $q(dy | x)$ — стохастическое ядро на Y при условии X , которое для любого x приписывает вероятность, равную единице, точке $f(x)$ $\in Y$. Ядро $q(dy | x)$ предельно измеримо тогда и только тогда, когда функция f предельно измерима.

Доказательство. См. доказательство следствия 7.44.3. $\square$

Предложение 11.2. Пусть X и Y — борелевские пространства, и пусть $q(dy | x)$ — стохастическое ядро на Y при условии X . Следующие утверждения эквивалентны:

(а) Стохастическое ядро $q(dy | x)$ предельно измеримо.

(б) Для любого множества $B \in \mathcal{B}_Y$ отображение $\lambda_B: X \rightarrow R$, определенное равенством

$$\lambda_B(x) = q(B | x), \quad (1)$$

предельно измеримо.

(в) Для любого множества $Q \in \mathcal{L}_Y$ отображение λ_Q , определяемое равенством (1), предельно измеримо.

Доказательство. Докажем, что (а) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а). Предположим, что утверждение (а) справедливо и $Q \in \mathcal{L}_Y$. Имеем $\lambda_Q = \theta_Q \circ \gamma$, где отображение $\gamma: X \rightarrow P(Y)$ задается равенством

$$\gamma(x) = q(dy | x), \quad (2)$$

а функция $\theta_Q: P(Y) \rightarrow R$ — равенством

$$\theta_Q(q) = q(Q). \quad (3)$$

Мы предположили, что γ предельно измерима, а предельная измеримость θ_Q имеет место в силу предложения Б.12. Следовательно, справедливо утверждение (в).

Очевидно, что (в) $\Rightarrow$ (б). Предположим теперь, что справедливо (б). Тогда

$$\sigma\left[\bigcup_{B \in \mathcal{B}_Y} \lambda_B^{-1}(B_R)\right] \subset \mathcal{L}_X.$$

Если определить γ и θ_B равенствами (2) и (3), то из предложения 7.25 имеем

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}[B_{P(Y)}] &= \gamma^{-1}\left[\sigma\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}_Y} \theta_B^{-1}(B_R)\right)\right] = \\ &= \sigma\left[\bigcup_{B \in \mathcal{B}_Y} \gamma^{-1}(\theta_B^{-1}(B_R))\right] = \sigma\left[\bigcup_{B \in \mathcal{B}_Y} \lambda_B^{-1}(B_R)\right] \subset \mathcal{L}_X, \end{aligned}$$

поэтому ядро $q(dy | x)$ предельно измеримо. $\square$

Предложение 11.3. Пусть X и Y — борелевские пространства, и пусть функция $f: XY \rightarrow R^*$ предельно измерима. Пусть $q(dy | x)$ — предельно измеримое стохастическое ядро на Y при условии X . Тогда отображение $\lambda: X \rightarrow R^*$, определенное соотношением

$$\lambda(x) = \int f(x, y) q(dy | x),$$

предельно измеримо.

Доказательство. Отображение $\delta(x) = p_x$ непрерывно (следствие 7.21.1) так же, как и отображение $\delta: P(X)P(Y) \rightarrow P(XY)$, определяемое равенством $\delta(p, q) = pq$, где pq — произведение мер (лемма 7.12). Предположим, что $Q \in \mathcal{L}_{XY}$ и $f = \chi_Q$. Для любого $x \in X$ имеет место равенство

$$\lambda(x) = [p_x q(dy | x)](Q) = \theta_Q(\sigma[\delta(x), \gamma(x)]), \quad (4)$$

где γ и θ_Q задаются формулами (2) и (3). Так как все функции в правой части (4) предельно измеримы, то отображение λ тоже предельно измеримо. Отсюда следует, что отображение λ предельно измеримо, если f — предельно измеримая простая функция. На произвольные предельно измеримые действительные в расширенном смысле функции f результат распространяется стандартным образом. $\square$

Следствие 11.3.1. Пусть X — борелевское пространство, и функция $f: X \rightarrow R^*$ предельно измерима. Тогда функция $\theta_f: P(X) \rightarrow R^*$, определенная соотношением

$$\theta_f(p) = \int f dp,$$

предельно измерима.

Докажем следующий усиленный вариант теоремы о выборе для полуаналитических снизу функций.

Предложение 11.4. Пусть X и Y — борелевские пространства, $D \subset XY$ — аналитическое множество и $f: D \rightarrow R^*$ — полуаналитическая снизу функция. Определим функцию $f^*: \text{proj}_X(D) \rightarrow R^*$ соотношением

$$f^*(x) = \inf_{y \in D_x} f(x, y).$$

Множество

$$I = \{x \in \text{proj}_X(D) \mid \text{для некоторого элемента } y_x \in D_x, f(x, y_x) = f^*(x)\}$$

предельно измеримо, и для любого числа $\epsilon > 0$ существует предельно измеримая функция $\varphi: \text{proj}_X(D) \rightarrow Y$ такая, что $\text{Gr}(\varphi) \subset D$, и для всех $x \in \text{proj}_X(D)$ выполняются соотношения

$$f[x, \varphi(x)] = f^*(x), \quad \text{если } x \in I,$$

$$f[x, \varphi(x)] \leq \begin{cases} f^*(x) + \epsilon, & \text{если } x \notin I, f^*(x) > -\infty, \\ -1/\epsilon, & \text{если } x \notin I, f^*(x) = -\infty. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство совпадает с доказательством предложения 7.50 (б) с тем исключением, что в местах, где привлекалось следствие 7.44.2 для получения универсальной измеримости суперпозиции аналитически измеримых функций, теперь используется предложение 11.1 для получения предельной измеримости такой суперпозиции. $\square$

Из замечания к следствию Б.11.1 видно, что множество I и селектор, полученный в предложении 11.4, в действительности L^2_X -измеримы. Это замечание наводит на мысль, что осуществленное в главах 8 и 9 построение оптимальных и ϵ -оптимальных стратегий при более внимательном анализе можно проделать, оставаясь в рамках минимальной σ -алгебры L^2_σ , относительно которой измеримы стратегии и издержки. В следующем разделе мы немного займемся этим, однако не будем рассматривать этот вопрос подробно.

Предложений 11.1–11.4 достаточно, чтобы можно было заменять в главах 8 и 9 любое упоминание $q\delta$ "(универсально измеримой) стратегии" словами "предельно измеримая стратегия". Не имеет значения, какой класс стратегий рассматривается при определении функций J_N^* и J^* ; доказательство предложения 8.1 вместе с предложением 11.5, приведенным ниже, можно использовать, чтобы показать, что эти функции определяют исключительно аналитически измеримыми марковскими стратегиями.

В следствии 11.1.1 говорится о том, что нерандомизированные предельно измеримые стратегии — это как раз совокупность последовательностей предельно измеримых отображений из состояния в управление, удовлетворяющих ограничениям на управлении (ср. с определением 8.2). Этот факт и предложение 11.2 нужны для доказательства аналога леммы 8.2 для случая предельной измеримости.

Из предложения 11.3 мы можем вывести предельную измеримость издержек, соответствующих предельно измеримой стратегии (ср. с определениями 8.3 и 9.3). Этот факт использовался, например, при доказательстве существования нерандомизированной полумарковской ϵ -оптимальной стратегии в предположении (F^-) (предложение 8.3).

Предложение 11.4 позволяет осуществлять предельно измеримый ϵ -оптимальный и оптимальный выбор. Возможность ϵ -оптимального выбора для универсально измеримых функций используется практически в каждом

доказательстве в главах 8 и 9. Возможность точно оптимального выбора используется при доказательстве существования оптимальных стратегий при соответствующих допущениях (предложения 8.5, 9.19 и 9.20).

11.2. Аналитически измеримые стратегии

Некоторые результаты о существовании из глав 8 и 9 могут быть усилены вплоть до утверждений о существовании ϵ -оптимальных аналитически измеримых стратегий. Это получается благодаря предложению 7.50 (а) и приведенным ниже предложениям. Предложение 11.5 является аналогом следствия 7.44.3 для универсально измеримых стратегий и следствия 11.1.1 для предельно измеримых стратегий.

Предложение 11.5. Пусть X и Y — борелевские пространства, $f: X \rightarrow Y$ — некоторая функция, $q(dy|x)$ — стохастическое ядро на Y при условии X , которое для любого x приписывает вероятность, равную единице, точке $f(x) \in Y$. Ядро $q(dy|x)$ аналитически измеримо тогда и только тогда, когда аналитически измерима функция f .

Доказательство. Уточним доказательство следствия 7.44.3. Положим $\gamma(x) = q(dy|x)$ и $\delta(y) = p_y$, так что $\gamma = \delta \circ f$ и $f = \delta^{-1} \circ \gamma$. Тогда δ будет гомеоморфизмом из Y в $\bar{Y} = \{p_y | y \in Y\}$, поэтому оба отображения δ и $\delta^{-1}: \bar{Y} \rightarrow Y$ будут измеримы по Борелю. Если функция f аналитически измерима и $C \in \mathcal{B}_P(Y)$, то

$$\gamma^{-1}(C) = f^{-1}[\delta^{-1}(C)] \in \mathcal{A}_X,$$

поскольку $\delta^{-1}(C) \in \mathcal{B}_Y$. Если отображение γ аналитически измеримо и $B \in \mathcal{B}_Y$, то $f^{-1}(B) = \gamma^{-1}[\delta(B)] \in \mathcal{A}_X$, так как $\delta(B) \in \mathcal{B}_P(Y)$. $\square$

Предложение 11.6. Пусть X и Y — борелевские пространства и $q(dy|x)$ — стохастическое ядро на Y при условии X . Следующие утверждения эквивалентны.

(а) Стохастическое ядро $q(dy|x)$ аналитически измеримо.

(б) Для любого множества $B \in \mathcal{B}_Y$ отображение $\lambda_B: X \rightarrow R$, определяемое равенством

$$\lambda_B(x) = q(B|x), \quad (5)$$

аналитически измеримо.

Доказательство. Предположим, что справедливо утверждение (а), и положим $\gamma(x) = q(dy|x)$. Тогда для множеств $B \in \mathcal{B}_Y$, $C \in \mathcal{B}_R$ и функции $\theta_B: P(Y) \rightarrow R$, определенной равенством (3), имеем

$$\lambda_B^{-1}(C) = \gamma^{-1}[\theta_B^{-1}(C)] \in \mathcal{A}_X,$$

поскольку $\theta_B^{-1}(C) \in \mathcal{B}_P(Y)$ (предложение 7.25). Следовательно, справедливо (б).

Если справедливо утверждение (б), то справедливость (а) можно показать с помощью тех же рассуждений, что при доказательстве предложения 11.2. $\square$

Из следствия Б.11.1 мы узнаем, что суперпозиция аналитически измеримых функций не обязательно должна быть аналитически измерима, поэтому издержки, соответствующие аналитически измеримой стратегии в модели стохастического оптимального управления, могут не быть аналитически измеримыми. Чтобы убедиться в этом, достаточно явно выписать издержки, отвечающие нерандомизированной марковской аналитически измеримой стратегии при горизонте 2 (ср. с определением 8.3).

Просмотр глав 8 и 9 показывает следующее. Предложение 8.3 остается справедливым, если слово "стратегия" заменить в нем словами "аналити-

чески измеримая стратегия", за исключением того, что в предположении (F^-) не гарантируется существование аналитически измеримой нерандомизированной полумарковской ϵ -оптимальной стратегии. Однако можно показать, что аналитически измеримая нерандомизированная ϵ -оптимальная стратегия существует, если $g \leq 0$ [20].

Доказательство существования последовательности нерандомизированных марковских стратегий, обладающей $\{\epsilon_n\}$ -мажорируемой сходимостью к оптимальности (предложение 8.4), не проходит в том месте, где мы предполагаем, что существует последовательность одношаговых стратегий $\{\mu_0^n\}$, для которой $T_{\mu_0^n}(J_0) \leq T_{\mu_0^{n-1}}(J_0)$. Это происходит потому, что функция $T_{\mu_0^{n-1}}(J_0)$ может не быть аналитически измеримой.

В первой фразе предложения 9.19 слово "стратегия" может быть заменено словами "аналитически измеримая стратегия". Утверждение предложения 9.20, относящееся к ϵ -оптимальности, тоже зависит от (F^-) -части предложения 8.3, поэтому в нем простая замена слов незаконна. В случае (N) можно доказать существование аналитически измеримой нерандомизированной ϵ -оптимальной стратегии [20], но неизвестно, может ли эта стратегия быть выбрана полумарковской.

Результаты глав 8 и 9, касающиеся существования универсально измеримых оптимальных стратегий, зависят от возможности точного выбора из предложения 7.50 (6). Так как аналитически измеримые функции этим свойством не обладают, мы не можем использовать такие же рассуждения для того, чтобы прийти к выводу о существовании оптимальных аналитически измеримых стратегий.

11.3. Модели с мультипликативными издержками

В этом разделе мы возвращаемся к модели с мультипликативным функционалом издержек, впервые упоминавшейся в разделе 2.3.4. Мы будем рассматривать модель с конечным горизонтом в борелевских пространствах, и сформулируем результаты, которые можно получить, если эту борелевскую модель изучать в рамках обобщенной схемы главы 6. Это не позволит нам в полной мере использовать методы, развитые для модели с аддитивными издержками в главах 8 и 9, но поможет получить полезные результаты и проиллюстрировать применение обобщенной абстрактной модели главы 6. Читатель, конечно, может воспользоваться математическими результатами главы 7 для исследования модели с мультипликативным критерием при более общих, чем здесь, предположениях.

Сформулируем борелевскую модель с мультипликативными издержками. Пусть пространство состояний S , пространство управлений C и пространство возмущений W являются борелевскими. Пусть ограничение на управления U , отображающее пространство S в множество непустых подмножеств пространства C , таково, что множество $\Gamma = \{(x, u) \mid x \in S, u \in U(x)\}$ является аналитическим. Пусть ядро возмущений $p(dw \mid x, u)$ и функция системы $f: SCW \rightarrow S$ измеримы по Борелю. Пусть функция издержек за один шаг g — борелевская, и предположим, что существует число $b \in R$ такое, что $0 \leq g(x, u, w) \leq b$ для всех $x \in S, u \in U(x), w \in W$. Пусть горизонт N — целое положительное число.

Подобно разделу 6.1, обозначим через $\tilde{F}$ множество действительных в расширенном смысле универсально измеримых функций на S и через F^* — множество функций из $\tilde{F}$, являющихся полуаналитическими снизу. Через $\tilde{M}$ обозначим множество универсально измеримых функций на S

со значениями в S и с графиком в Γ . Определим отображение $H: SCF \rightarrow [0, \infty]$ соотношением

$$H(x, u, J) = \int_W g(x, u, w) J[f(x, u, w)] p(dw | x, u),$$

где считаем $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$. Положим функцию $J_0: S \rightarrow R^*$ тождественно равной единице. Тогда справедливы предположения A.1–A.4, F.2 и предположение о точном выборе из раздела 6.1. (Предположение A.2 следует из леммы 7.30 (4) и предложений 7.47 и 7.48. Предположение A.4 следует из предложения 7.50.) Из предложений 6.1 (а), 6.2 (а) и 6.3 вытекают следующие результаты, в которых используются обозначения раздела 6.1.

Предложение 11.7. В борелевской модели с мультипликативными издержками и конечным горизонтом выполняется равенство $J_N^* = T^N(J_0)$, и для любого числа $\epsilon > 0$ существует ϵ -оптимальная (марковская) при горизонте N стратегия. Стратегия $\pi^* = (\mu_0^*, \dots, \mu_{N-1}^*)$ равномерно оптимальна при горизонте N тогда и только тогда, когда $(T_{\mu_k^*}^* T^{N-k-1})(J_0) = T^{N-k}(J_0)$, $k = 0, \dots, N-1$, и она существует тогда и только тогда, когда инфимум в выражении

$$T^{k+1}(J_0)(x) = \inf_{u \in U(x)} H[x, u, T^k(J_0)]$$

достигается для любого $x \in S$ и $k = 0, \dots, N-1$.

Достаточным условием достижения инфимума является компактность множества

$$U_k(x, \lambda) = \{u \in U(x) | H[x, u, T^k(J_0)] \leq \lambda\}$$

для любых $x \in S, \lambda \in R$ и $k = 0, \dots, N-1$.

Приложение А

ВНЕШНИЙ ИНТЕГРАЛ

Всюду в этом приложении $(X, \mathcal{B}, p)$ обозначает вероятностное пространство. Если не оговорено иначе, то f, g и h являются функциями из X в $[-\infty, \infty]$.

Определение А.1. Для функции $f \geq 0$ внешний интеграл по мере p определяется формулой

$$\int^* f dp = \inf\{\int g dp \mid f \leq g, g - \mathcal{B}\text{-измеримая функция}\}. \quad (1)$$

Если функция f произвольная, то полагаем

$$\int^* f dp = \int^* f^+ dp - \int^* f^- dp, \quad (2)$$

где $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$, $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$, и принято считать $\int^* -\infty dp = -\infty$.

Лемма А.1. Для любой функции $f \geq 0$ существует $\mathcal{B}$ -измеримая функция $g, g \geq f$ такая, что

$$\int^* f dp = \int g dp. \quad (3)$$

Доказательство. Выберем $\mathcal{B}$ -измеримые функции g_n такие, что $g_n \geq f$ и имеет место сходимость

$$\int g_n dp \downarrow \int^* f dp.$$

Без потери общности можем считать, что $g_1 \geq g_2 \geq \dots$. Пусть $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Тогда $g \geq f$, функция g $\mathcal{B}$ -измерима и удовлетворяет равенству (3). $\square$

Лемма А.2. Если $f \geq 0$ и $h \geq 0$, то

$$\int^*(f+h) dp \leq \int^* f dp + \int^* h dp. \quad (4)$$

Если хотя бы одна из функций f или h $\mathcal{B}$ -измерима, то (4) верно со знаком равенства.

Доказательство. Пусть $g_1 \geq f, g_2 \geq h$ и функции g_1 и g_2 $\mathcal{B}$ -измеримы, а $\int^* f dp = \int g_1 dp, \int^* h dp = \int g_2 dp$. Тогда $g_1 + g_2 \geq f + h$ и равенство (4) следует из определения (1).

Предположим, что функция h $\mathcal{B}$ -измерима и $\int h dp < \infty$. (Если $\int h dp = \infty$, легко видеть, что (4) верно со знаком равенства.) Пусть $f + h \leq g$, где функция g $\mathcal{B}$ -измерима, и

$$\int^*(f+h) dp = \int g dp.$$

Тогда $f \leq g - h$ и функция $g - h$ $\mathcal{B}$ -измерима, поэтому

$$\int^* f dp \leq \int g dp - \int h dp,$$

откуда следует, что

$$\int^* f \, dp + \int h \, dp \leq \int^* (f + h) \, dp.$$

Следовательно, в соотношении (4) имеет место равенство. $\square$

Приведем пример, показывающий, что в соотношении (4) может быть строгое неравенство, даже если $f + h$ является V -измеримой функцией. Для этого и последующих примеров нам потребуется следующее замечание. Для любого множества $E \subset X$

$$\int^* \chi_E \, dp = p^*(E), \quad (5)$$

где $p^*(E)$ есть p -внешняя мера множества E , определяемая соотношением

$$p^*(E) = \inf \{p(B) \mid E \subset B, B \in \mathcal{B}\},$$

а χ_E — индикатор множества E , равный

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

Чтобы проверить формулу (5), заметим, что если $\chi_E \leq g$ и g — V -измеримая функция, то $\{x \mid g(x) \geq 1\}$ является V -измеримым множеством, содержащим E , и, следовательно, $\int g \, dp \geq p^*(E)$. Из определения А.1 следует, что

$$\int^* \chi_E \, dp \geq p^*(E). \quad (6)$$

С другой стороны, если $\{B_n\}$ — последовательность V -измеримых множеств такая, что $E \subset B_n$ и $p(B_n) \downarrow p^*(E)$, то $p(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = p^*(E)$. По построению $\chi_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} \geq \chi_E$. Но функция $\chi_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n}$ является V -измеримой, поэтому

$$\int \chi_{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n} \, dp = p^*(E).$$

Отсюда следует неравенство, обратное к (6).

Заметим, что предыдущие рассуждения показывают, что для любого множества E существует множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $E \subset B$ и $p(B) = p^*(E)$.

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$, пусть $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра и p — лебегова мера, рассматриваемая только на $\mathcal{B}$. Пусть $E \subset X$ является множеством, для которого $p^*(E) = p^*(X - E) = 1$ (см. [37, раздел 16, теорема E]). Тогда

$$\int (\chi_E + \chi_{X-E}) \, dp = \int 1 \, dp = 1, \quad \int^* \chi_E \, dp + \int^* \chi_{X-E} \, dp = 2,$$

и в соотношении (4) имеет место строгое неравенство.

Как показывает следующий пример, лемма А.2 не может быть распространена на ограниченные (быть может, отрицательные) функции, даже если функция h является V -измеримой.

Пример 2. Пусть $(X, \mathcal{B}, p)$ и E такие же, как в предыдущем примере. Положим $f = \chi_E - \chi_{X-E}$, $h = 1$. Тогда

$$\int^* (f + h) \, dp = \int^* 2 \chi_E \, dp = 2,$$

$$\int^* f \, dp + \int h \, dp = \int^* \chi_E \, dp - \int^* \chi_{X-E} \, dp + 1 = 1.$$

Лемма А.3.

(а) Если $f \leq g$, то

$$\int^* f \, dp \leq \int^* g \, dp.$$

(б) Если $\epsilon > 0$ и $f \leq g \leq f + \epsilon$, то

$$\int^* f \, dp \leq \int^* g \, dp \leq \int^* f \, dp + 2\epsilon.$$

(7)

(в) Если $\int^* f^+ dp < \infty$ или $\int^* f^- dp < \infty$, то

$$\int^* (-f) dp = -\int^* f dp. \quad (8)$$

(г) Если множества $A, B \in \mathcal{B}$ не пересекаются, то для любой функции f

$$\int^* \chi_{A \cup B} f dp = \int^* \chi_A f dp + \int^* \chi_B f dp. \quad (9)$$

(д) Если $E \subset X$ удовлетворяет равенству $\rho^*(E) = 0$, то для любой функции f

$$\int^* f dp = \int^* \chi_{X-E} f dp.$$

(е) Если $\rho^*(\{x \mid f(x) = \infty\}) > 0$, то $\int^*(g + f) dp = \infty$ для любой функции g

(ж) Если $\rho^*(\{x \mid f(x) = -\infty\}) > 0$, то для любой функции g либо

$$\int^*(g + f) dp = \infty,$$

либо

$$\int^*(g + f) dp = -\infty.$$

Доказательство.

(а) Если $f \leq g$, то $f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$. В силу определения (1)

$$\int^* f^+ dp \leq \int^* g^+ dp, \quad \int^* f^- dp \geq \int^* g^- dp,$$

и нужный результат следует из равенства (2).

(б) Ввиду (а) остается только показать, что

$$\int^*(f + \epsilon) dp \leq \int^* f dp + 2\epsilon. \quad (10)$$

Для $\mathcal{B}$ -измеримой функции g_1 такой, что $g_1 \geq f^+$ и

$$\int^* f^+ dp = \int g_1 dp,$$

имеем $(f + \epsilon)^+ \leq g_1 + \epsilon$, поэтому

$$\int^*(f + \epsilon)^+ dp \leq \int g_1 dp + \epsilon = \int^* f^+ dp + \epsilon. \quad (11)$$

Для $\mathcal{B}$ -измеримой функции g_2 такой, что $g_2 \geq (f + \epsilon)^-$ и

$$\int^*(f + \epsilon)^- dp = \int g_2 dp,$$

имеем

$$g_2 + \epsilon \geq (f + \epsilon)^- + \epsilon = \max\{f^- - \epsilon, 0\} + \epsilon \geq f^-,$$

поэтому

$$\epsilon + \int^*(f + \epsilon)^- dp = \epsilon + \int g_2 dp = \int (g_2 + \epsilon) dp \geq \int^* f^- dp. \quad (12)$$

Объединив неравенства (11) и (12), получим (10).

(в) Имеем

$$\begin{aligned} \int^*(-f) dp &= \int^*(-f)^+ dp - \int^*(-f)^- dp = \\ &= \int^* f^- dp - \int^* f^+ dp = \\ &= -[\int^* f^+ dp - \int^* f^- dp] = -\int^* f dp, \end{aligned}$$

где для законности предпоследнего равенства необходимо, чтобы $\int^* f^+ dp < \infty$ или $\int^* f^- dp < \infty$.

(г) Предположим, что $f \geq 0$. Пусть g является $\mathcal{B}$ -измеримой функцией такой, что $g \geq \chi_{A \cup B} f$ и

$$\int^* \chi_{A \cup B} f \, dp = \int f g \, dp.$$

Тогда $\chi_A g \geq \chi_A f$, $\chi_B g \geq \chi_B f$, поэтому

$$\int^* \chi_{A \cup B} f \, dp = \int \chi_A g \, dp + \int \chi_B g \, dp \geq \int^* \chi_A f \, dp + \int^* \chi_B f \, dp. \quad (13)$$

Теперь предположим, что функции g_1 и g_2 являются $\mathcal{B}$ -измеримыми, $g_1 \geq \chi_A f$, $g_2 \geq \chi_B f$ и

$$\int g_1 \, dp = \int^* \chi_A f \, dp, \quad \int g_2 \, dp = \int^* \chi_B f \, dp.$$

Тогда $g_1 + g_2 \geq \chi_{A \cup B} f$, поэтому

$$\int^* \chi_A f \, dp + \int^* \chi_B f \, dp = \int (g_1 + g_2) \, dp \geq \int^* \chi_{A \cup B} f \, dp. \quad (14)$$

Объединяя неравенства (13) и (14), получаем равенство (9) для $f \geq 0$. Распространение результата на произвольную функцию очевидно.

(д) Предположим, что $f \geq 0$. Выберем множество $B \in \mathcal{B}$ такое, что $p(B) = p^*(E) \neq 0$, $B \supset E$. Из (2) получаем

$$\int^* f \, dp = \int^* \chi_{X-B} f \, dp \leq \int^* \chi_{X-E} f \, dp \leq \int^* f \, dp.$$

Следовательно, $\int^* f \, dp = \int^* \chi_{X-E} f \, dp$. Распространение результата на произвольную функцию f очевидно.

(е) Если $f(x) = \infty$, то $(g+f)^+(x) = \infty$. Поэтому

$$p^*(\{x \mid (g+f)^+(x) = \infty\}) > 0.$$

Следовательно, $\int^*(g+f)^+ \, dp = \infty$, откуда следует, что $\int^*(g+f) \, dp = \infty$.

(ж) Рассмотрим множество $E = \{x \mid f(x) = -\infty\}$ и $E_g = \{x \mid f(x) = -\infty, g(x) < \infty\}$. Если $p^*(E_g) = 0$, то

$$p^*(E - E_g) = p^*(E \setminus E_g) + p^*(E_g) \geq p^*(E) > 0.$$

Так как $f(x) + g(x) = \infty$ для $x \in E - E_g$, то из (е) следует, что $\int^*(g+f) \, dp = \infty$. Если $p^*(E_g) > 0$, то $p^*(\{x \mid (g+f)^-(x) = \infty\}) \geq p^*(E_g) > 0$, и, следовательно, согласно (е), $\int^*(g+f)^- \, dp = \infty$. Следовательно, если $\int^*(g+f)^+ \, dp = \infty$, то $\int^*(g+f) \, dp = \infty$, в то время как, если $\int^*(g+f)^+ \, dp < \infty$, то $\int^*(g+f) \, dp = -\infty$. $\square$

Границы, задаваемые соотношением (7), являются наилучшими из возможных. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять функцию f из примера 2, положить $g = f + 1$, а $\epsilon = 1$. Несмотря на некоторое своеобразие внешнего интегрирования, справедлива теорема о монотонной сходимости, которую мы теперь докажем.

Предложение А.1. Если последовательность неотрицательных функций $\{f_n\}$ такова, что $f_n \uparrow f$, то

$$\int^* f_n \, dp \uparrow \int^* f \, dp. \quad (15)$$

Если последовательность неположительных функций $\{f_n\}$ такова, что $f_n \downarrow f$, то

$$\int^* f_n \, dp \downarrow \int^* f \, dp.$$

Доказательство. Мы докажем первое утверждение предложения. Второе следует из первого и леммы А.3(в). Предположим, что $f_n \geq 0$ и $f_n \uparrow f$. Пусть последовательность $\mathcal{B}$ -измеримых функций $\{g_n\}$ такова, что $g_n \geq f_n$ и

$$\int^* f_n \, dp = \int g_n \, dp. \quad (16)$$

Если для некоторого номера n

$$\int g_n dp = \int^* f_n dp = \infty,$$

то сходимость (15) гарантирована. В противном случае

$$\int g_n dp < \infty \quad (17)$$

для любого номера n .

Предположим, что неравенство (17) выполняется для любого n и что для некоторого n

$$p(\{x \mid g_n(x) > g_{n+1}(x)\}) > 0.$$

Тогда, поскольку $g_{n+1} \geq f_{n+1} \geq f_n$, то функция $\bar{g}$, определяемая соотношением

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{если } g_n(x) \leq g_{n+1}(x), \\ g_{n+1}(x), & \text{если } g_n(x) > g_{n+1}(x), \end{cases}$$

удовлетворяет неравенствам $g_n \geq \bar{g} \geq f_n$ всюду и $\bar{g} < g_n$ на множестве положительной меры. Это противоречит (16). Следовательно, мы можем без ограничения общности считать, что неравенство (17) выполняется и $g_1 < \leq g_2 \dots$. Пусть $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Тогда $g \geq f$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int^* f_n dp = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dp = \int g dp \geq \int^* f dp.$$

Но $f_n \leq f$ при любом n , поэтому справедливо и неравенство противоположного знака. $\square$

Можно было бы ожидать, что если последовательность функций $\{f_n\}$ ограничена снизу и $f_n \uparrow f$, то равенство (15) остается справедливым. Как показывает следующий пример, это не так.

П р и м е р 3. Пусть $X = [0, 1]$, $\mathcal{B}$ — борелевская σ -алгебра, p — лебегова мера на $\mathcal{B}$. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на множестве X следующим образом:

$$x \sim y \iff x - y \text{ рационально.}$$

Пусть множество F_0 построено путем выбора одного представителя из каждого класса эквивалентности. Пусть $Q = \{q_0, q_1, \dots\}$ — последовательность всех рациональных чисел из $[0, 1]$ с $q_0 = 0$. Положим

$$F_k = \{x + q_k \pmod{1} \mid x \in F_0\} = F_0 + q_k \pmod{1}, \\ k = 0, 1, \dots$$

Тогда $F_0, F_1, \dots$ является последовательностью непересекающихся множеств такой, что

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} F_k = [0, 1]. \quad (18)$$

Если для некоторого $n < \infty$ мы имели бы $p^*(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k) < 1$, то $E = \bigcup_{k=0}^{n-1} F_k$ содержало бы $\mathcal{B}$ -измеримое множество меры $\delta > 0$. Для $k = 1, \dots, n-1$ положим $q_k = r_k/s_k$, где r_k и s_k — целые числа, и дробь r_k/s_k несократима. Пусть $\{p_1, p_2, \dots\}$ является последовательностью простых чисел таких, что

$$\max_{1 \leq k \leq n-1} s_k < p_1 < p_2 < \dots$$

Тогда множества $E, E + p_1^{-1} [\text{mod } 1], E + p_2^{-1} [\text{mod } 1], \dots$ попарно не пересекаются, и в силу инвариантности меры p при сдвигах каждое из них содержало бы V -измеримое множество меры $\delta > 0$. Отсюда следовало бы, что полуинтервал $[0, 1)$ должен содержать множество бесконечной меры. Это противоречие означает, что на самом деле

$$p^*\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k\right) = 1 \quad (19)$$

для любого n . Положим

$$f_n = -\chi_{\bigcup_{k=n}^{\infty} F_k}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда $f_n \uparrow 0$, но, из (5) и (19) следует, что для любого n $\int^* f_n dp = -1$. Помняв знак в примере 3, увидим, что вторая часть теоремы А.1 не может быть распространена на ограниченные сверху функции без наложения дополнительных условий. Рассмотрим теперь такие условия.

Следствие А.1.1. Пусть последовательность положительных чисел $\{\epsilon_n\}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$. Пусть последовательность $\{f_n\}$ такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad (20)$$

$$f \leq f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$f_n(x) \leq f(x) + \epsilon_n, \quad f(x) > -\infty, \quad (22)$$

$$f_n(x) \leq f_{n-1}(x) + \epsilon_n, \quad f(x) = -\infty, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (23)$$

$$\int^* f_1 dp < \infty. \quad (24)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int^* f_n dp = \int^* f dp. \quad (25)$$

Доказательство. Из условия (20) следует $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^+ = f^+$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^- = f^-$. Заметим, что $\inf_{k \geq n} f_k^- \leq f_n^- \leq f^-$ и $\inf_{k \geq n} f_k^- \uparrow f^-$ при $n \rightarrow \infty$. В силу теоремы А.1 имеем

$$\int^* f^- dp = \lim_{n \rightarrow \infty} \int^* \inf_{k \geq n} f_k^- dp \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int^* f_n^- dp \leq \int^* f^- dp,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int^* f_n^- dp = \int^* f^- dp. \quad (26)$$

Положим $A = \{x | f(x) = -\infty\}$. Если $p^*(A) = 0$, то из условий (21), (22), (24) и леммы А.3 (б) и (д) следует, что

$$\int^* f^+ dp \leq \int^* f_n^+ dp \leq 2\epsilon_n + \int^* f^+ dp < \infty,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int^* f_n^+ dp = \int^* f^+ dp < \infty. \quad (27)$$

Объединяя соотношения (26) и (27), получим равенство (25). Если $p^*(A) > 0$, то $\int^* f^- dp = -\infty$ и из соотношения (26) будет следовать равенство (25) при условии, что

$$\int^* f^+ dp < \infty \quad (28)$$

и кроме того

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int^* f_n dp < \infty. \quad (29)$$

Из условий (21) и (24) следует (28). Из условий (21) — (23) следует, что для любого $x \in X$

$$f_n(x) \leq f_{n-1}(x) + \epsilon_n,$$

$$n = 2, 3, \dots,$$

поэтому

$$\int^* f_n^+ dp \leq 2\epsilon_n + \int f_{n-1}^+ dp,$$

$$\int^* f_n^+ dp \leq 2 \sum_{k=2}^n \epsilon_k + \int^* f_1^+ dp.$$

Из конечности $\sum_{k=2}^{\infty} \epsilon_k$ и условия (24) следует неравенство (29). $\square$

Приложение Б

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИЗМЕРИМОСТИ БОРЕЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Это приложение дополняет раздел 7.6. Обозначения и терминология, используемые здесь, точно такие же, как и там, и в основном определены в разделе 7.1.

Б.1. Доказательство предложения 7.35 (д)

Нашей первой задачей будет доказательство предложения 7.35 (д). Для этого введем пространство $N^* = \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ с топологией, индуцированной метрикой

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|,$$

где считаем $1/\infty = 0$. Обозначим $N^* = N^* N^* \dots$, причем в N^* рассматривается топология произведения. Пространство N последовательностей натуральных чисел является топологическим подпространством пространства N^* . Пространство N^* компактно согласно теореме Тихонова, в то время как пространство N некомпактно. Если (X, P) и (Y, Q) — пространства с покрытием, то через PQ обозначается покрытие пространства XY :

$$PQ = \{PQ \mid P \in P, Q \in Q\}. \quad (1)$$

Предложение Б.1. Пусть (X, P) — пространство с покрытием и K — совокупность компактных подмножеств пространства N^* . Тогда проекция на X любого множества из $S(PK)$ принадлежит $S(P)$. И обратно, любое множество из $S(P)$ является проекцией на X некоторого множества из $[(PK)_\sigma]_\delta$.

Доказательство. Пусть S — система Суслина для PK . Тогда для любого элемента $s \in \Sigma$ множество $S(s)$ имеет вид $S(s) = S_1(s)S_2(s)$, где

$S_1(s) \in P$ и $S_2(s) \in K$. Ядро системы S представимо в виде

$$\begin{aligned} N(S) &= \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} S(s) = \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} [S_1(s) S_2(s)] = \\ &= \bigcup_{z \in N} \{ [\bigcap_{s < z} S_1(s)] [\bigcap_{s < z} S_2(s)] \}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\text{proj}_X [N(S)] = \bigcup_{z \in A} \bigcap_{s < z} S_1(s),$$

где множество

$$A = \{z \in N \mid \bigcap_{s < z} S_2(s) \neq \emptyset\}.$$

Так как всякое множество $S_2(s)$ компактно, то

$$A = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \mid \bigcap_{k=1}^n S_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \neq \emptyset \quad \forall n\}.$$

Определим систему Суслина R для P соотношением

$$R(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{cases} S_1(\xi_1, \dots, \xi_n), & \text{если } \bigcap_{k=1}^n S_2(\xi_1, \dots, \xi_k) \neq \emptyset, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\text{proj}_X [N(S)] = \bigcup_{z \in A} \bigcap_{s < z} S_1(s) = \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} R(s) = N(R),$$

поэтому $\text{proj}_X [N(S)] \in S(P)$.

Для доказательства второй части предложения предположим, что S является системой Суслина для P . Определим систему Суслина R для K соотношением

$$R(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N^* \mid \xi_1 = \sigma_1, \dots, \xi_n = \sigma_n\}.$$

Для фиксированного элемента $z_0 \in N$ имеем $\bigcap_{s < z_0} R(s) = \{z_0\}$, поэтому

$$\bigcap_{s < z_0} [S(s) R(s)] = [\bigcap_{s < z_0} S(s)] [\bigcap_{s < z_0} R(s)] = \{(x, z_0) \mid x \in \bigcap_{s < z_0} S(s)\}. \quad (2)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} N(S) &= \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} S(s) = \bigcup_{z \in N} \text{proj}_X \left\{ \bigcap_{s < z} [S(s) R(s)] \right\} = \\ &= \text{proj}_X \left\{ \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} [S(s) R(s)] \right\}, \end{aligned}$$

и остается только показать, что

$$\bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} [S(s) R(s)] \subset [(PK)_\sigma]_\delta. \quad (3)$$

Если мы сможем показать, что

$$\bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} [S(s) R(s)] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \Sigma_k} [S(s) R(s)], \quad (4)$$

где Σ_k — множество элементов из Σ , имеющих k компонент, то отсюда будет следовать соотношение (3). Пусть заданы точка $x \in X$ и элемент $z_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots) \in N^*$. Предположим, что

$$(x, z_0) \in \bigcap_{z \in N} \bigcap_{s < z} [S(s) R(s)].$$

Из соотношения (2) видно, что $z_0 \in N$ и $(x, z_0) \in \bigcap_{s < z_0} [S(s) R(s)]$, поэтому $(x, z_0) \in S(\xi_1^0, \dots, \xi_k^0) R(\xi_1^0, \dots, \xi_k^0)$ для всех $k \geq 1$. Отсюда следует, что $(x, z_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \Sigma_k} [S(s) R(s)]$ и

$$\bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} [S(s) R(s)] \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \Sigma_k} [S(s) R(s)]. \quad (5)$$

С другой стороны, если $(x, z_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \Sigma_k} [S(s) R(s)]$, то $(x, z_0) \in \bigcup_{s \in \Sigma_k} [S(s) R(s)]$ для всех $k \geq 1$. Это может иметь место только в том случае, если $z_0 \in N$ и $(x, z_0) \in S(\xi_1^0, \dots, \xi_k^0) R(\xi_1^0, \dots, \xi_k^0)$. Следовательно,

$$(x, z_0) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [S(\xi_1^0, \dots, \xi_k^0) R(\xi_1^0, \dots, \xi_k^0)] =$$

$$= \bigcap_{s < z_0} [S(s) R(s)] \subset$$

$$\subset \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} [S(s) R(s)],$$

что доказывает включение, обратное по отношению к (5). Отсюда следует равенство (4). $\square$

Если (X, P) — пространства с покрытием, Y — некоторое другое пространство и множество $Q \subset Y$, то определим покрытие PQ пространства XY , полагая

$$PQ = \{PQ | P \in P\}.$$

Лемма Б.1. Пусть (X, P) и (Y, Q) — пространство с покрытием. Тогда:

(а) $S(P)Q = S(PQ)$ для любого множества $Q \subset Y$;

(б) $S(P)Q \subset S(PQ)$.

Доказательство. Утверждение (а) тривиально, а (б) следует из (а). $\square$

Теперь мы в состоянии доказать часть (д) предложения 7.35.

Предложение Б.2. Пусть (X, P) — пространство с покрытием. Тогда $S(P) = S[S(P)]$.

Доказательство. Ввиду предложения 7.35 (г) остается доказать только тот факт, что

$$S(P) \supset S[S(P)]. \quad (6)$$

Пусть N^* и K такие, как в предложении Б.1. Тогда, если $A \in S[S(P)]$, то в силу второй части предложения Б.1 $A = \text{proj}_X(B)$ для некоторого множества $B \in ([S(P)K]_{\sigma})_{\delta}$. Согласно лемме Б.1 (б) и предложению 7.35 (б) и (в) имеем

$$B \in ([S(P)K]_{\sigma})_{\delta} \subset ([S(PK)]_{\sigma})_{\delta} = S(PK).$$

Из первой части предложения Б.1 следует, что $A = \text{proj}_X(B) \in S(P)$, значит, включение (6) выполнено. $\square$

Б.2. Доказательство предложения 7.16

В предложении 7.16 утверждается, что борелевские пространства X и Y борелевски изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую мощность. С этим связано утверждение о том, что любые два несчетные борелевские пространства борелевски изоморфны друг другу. Этот последний факт использовался в предложении 7.27, где мы, без ограничения общности, считали рассматриваемые борелевские пространства копиями полуинтервала $(0, 1]$, этот же факт использовался в предложении 7.39, где результаты, полученные для пространства N , переносились на произвольное несчетное борелевское пространство, и, наконец, он будет использован в предложении Б.7 для того, чтобы изучать свойства предельной σ -алгебры только для пространства N . Доказательства предложения 7.16 и следствия 7.16.1 зависят от следующей леммы, которая непосредственно вытекает из предложений 7.36 и 7.37. Читатель может убедиться в том, что эти результаты опираются только на предложения 7.35, Б.1 и Б.2, и поэтому рассуждения не представляют собой порочного круга.

Лемма Б.2. Пусть X — непустое борелевское пространство. Тогда существует непрерывное отображение f пространства N на X .

Определим M как множество бесконечных последовательностей нулей и единиц. Можно считать множество M счетным произведением копий множества $\{0, 1\}$ и ввести в нем топологию произведения, считая, что в множестве $\{0, 1\}$ задана дискретная топология. В силу теоремы Тихонова множество M компактно в такой топологии. Оно так же метризуемо, как полное сепарабельное пространство.

Наше доказательство предложения 7.16 состоит из трех частей. Во-первых, покажем, что любое несчетное борелевское пространство содержит борелевское подмножество, гомеоморфное множеству M . Затем убедимся, что любое несчетное борелевское пространство изоморфно борелевскому подмножеству множества M . И наконец, установим, что из этих двух фактов следует изоморфность любого несчетного борелевского пространства множеству M .

Лемма Б.3. Пусть X — несчетное борелевское пространство. Тогда существует компактное множество $K \subset X$ такое, что множества M и K гомеоморфны.

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение N на X из леммы Б.2. Для любой точки $x \in X$ выберем элемент $z_x \in N$ такой, что $x = f(z_x)$. Положим $S = \{z_x | x \in X\}$, так что f является взаимно однозначным отображением S на X . Для элемента $z \in S$, если это возможно, выберем открытую окрестность $T(z)$ элемента z такую, что множество $S \cap T(z)$ счетно. Пусть R — множество всех z , для которых такая окрестность $T(z)$ может быть найдена. Так как сепарабельные метризуемые пространства обладают свойством Линделефа, то существует счетное подмножество R' множества R такое, что $\bigcup_{z \in R} T(z) = \bigcup_{z \in R'} T(z)$, поэтому

$$R \subset S \cap \left[\bigcup_{z \in R} T(z) \right] = \bigcup_{z \in R'} [S \cap T(z)],$$

и R — счетное множество. Так как множество S несчетно, то должно быть несчетным и множество $S - R$. Далее, если $z \in S - R$, то любая открытая окрестность точки z содержит бесконечно много точек множества $S - R$.

Пусть d — метрика в пространстве N , согласованная с его топологией и такая, что (N, d) — полное пространство. Для любой точки $\bar{z} \in N$ замкнутая сфера радиуса r с центром в точке $\bar{z}$ — это множество вида $\{z \in N | d(z, \bar{z}) \leq r\}$. Внутренность этой сферы, обозначаемая $\text{Int}\{z \in N | d(z, \bar{z}) \leq r\}$ есть

множество $\{z \in N \mid d(z, \bar{z}) < r\}$. Пусть $z(0)$ и $z(1)$ — две различные точки в множестве $S - R$. Тогда $f[z(0)] \neq f[z(1)]$, поэтому существуют две непересекающиеся открытые окрестности U и V точек $f[z(0)]$ и $f[z(1)]$ соответственно. Пусть $S(0)$ и $S(1)$ — непересекающиеся замкнутые сферы радиуса не больше чем единица с центрами в точках $z(0)$ и $z(1)$ и содержащиеся в множествах $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ соответственно. Получаем тогда, что множества $f[S(0)]$ и $f[S(1)]$ не пересекаются. Заметим также, что для любой точки $z \in (S - R) \cap \text{Int } S(0)$ любая открытая окрестность точки z содержит бесконечно много точек множества $(S - R) \cap \text{Int } S(0)$, и то же самое справедливо для сферы $S(1)$. Точно таким же способом можно выбрать различные точки $z(0, 0)$ и $z(0, 1)$ из множества $(S - R) \cap \text{Int } S(0)$ и различные точки $z(1, 0)$ и $z(1, 1)$ из множества $(S - R) \cap \text{Int } S(1)$ и выбрать непересекающиеся замкнутые сферы $S(0, 0)$, $S(0, 1)$, $S(1, 0)$ и $S(1, 1)$ с радиусами не больше чем $\frac{1}{2}$, и с центрами в точках $z(0, 0)$, $z(0, 1)$, $z(1, 0)$ и $z(1, 1)$ так, что все множества $f[S(0, 0)]$, $f[S(0, 1)]$, $f[S(1, 0)]$ и $f[S(1, 1)]$ непересекающиеся. Эти сферы можно выбрать таким образом, чтобы $S(0, 0)$ и $S(0, 1)$ содержались в $S(0)$, а $S(1, 0)$ и $S(1, 1)$ содержались в $S(1)$. На k -м шаге этого процесса мы выбираем семейство непересекающихся замкнутых сфер $S(\mu_1, \dots, \mu_k)$ радиуса не больше чем $1/k$, с центрами в различных точках $z(\mu_1, \dots, \mu_k)$ множества $S - R$, где каждая компонента μ_j равна либо нулю либо единице. Далее, можно так выбрать эти сферы, чтобы для любого набора $(\mu_1, \dots, \mu_{k-1})$ выполнялись соотношения

$$(i) f[S(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, 0)] \cap f[S(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, 1)] = \emptyset,$$

$$(ii) S(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_k) \subset S(\mu_1, \dots, \mu_{k-1}), \quad \mu_k = 0, 1.$$

Для фиксированной последовательности $m = (\mu_1, \mu_2, \dots) \in M$ множества $\{S(\mu_1, \dots, \mu_k)\}$ образуют убывающую последовательность замкнутых множеств, радиус которых стремится к нулю, поэтому последовательность $\{z(\mu_1, \dots, \mu_k)\}$ является последовательностью Коши и, следовательно, имеет предел $\varphi(m) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S(\mu_1, \dots, \mu_k)$.

Покажем, что отображение $\varphi: M \rightarrow N$ является гомеоморфизмом. Если $(\mu_1, \mu_2, \dots)$ и $(\nu_1, \nu_2, \dots)$ — два различных элемента множества M , то $\mu_k \neq \nu_k$ для некоторого номера k . Так как $\varphi(\mu_1, \mu_2, \dots) \in S(\mu_1, \dots, \mu_k)$, $\varphi(\nu_1, \nu_2, \dots) \in S(\nu_1, \dots, \nu_k)$ и множество $S(\mu_1, \dots, \mu_k)$ не пересекается с множеством $S(\nu_1, \dots, \nu_k)$, то $\varphi(\mu_1, \mu_2, \dots) \neq \varphi(\nu_1, \nu_2, \dots)$, и поэтому отображение φ является взаимно однозначным. Чтобы показать непрерывность отображения φ , возьмем последовательность $\{m_k\}$, сходящуюся к точке $m \in M$. Выберем $\epsilon > 0$ и целое положительное число k такое, что $2/k < \epsilon$. Тогда существует такое число $\bar{n}$, что первые k компонент элементов m_n и $m = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ совпадают для всех $n \geq \bar{n}$, поэтому и $\varphi(m_n)$ и $\varphi(m)$ принадлежат сфере $S(\mu_1, \dots, \mu_k)$. Отсюда следует, что $d(\varphi(m_n), \varphi(m)) \leq 2/k < \epsilon$, т.е. отображение φ непрерывно. Чтобы показать непрерывность отображения φ^{-1} , достаточно показать, что множество $\varphi(F)$ замкнуто в множестве $\varphi(M)$, если только множество F замкнуто в M . Этот факт следует из компактности множества M и непрерывности отображения φ . Обозначим через $N_1 \subset N$ компактный гомеоморфный образ множества M при отображении φ .

Покажем теперь, что отображение $f: N_1 \rightarrow X$ является гомеоморфизмом. Чтобы убедиться в том, что отображение f взаимно однозначно, выберем две различные точки z и $\hat{z}$ в множестве N_1 . Тогда существуют две различные точки $m = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ и $\hat{m} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \dots)$ в множестве M такие, что $z = \varphi(m)$ и $\hat{z} = \varphi(\hat{m})$. Для некоторого k имеем $\mu_k \neq \hat{\mu}_k$, поэтому в силу усло-

вия (i) $f(S(\mu_1, \dots, \mu_k)) \cap f(S(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_k)) = \emptyset$. Так как $z \in S(\mu_1, \dots, \mu_k)$ и $\hat{z} \in S(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_k)$, то $f(z) \neq f(\hat{z})$ и, следовательно, отображение f взаимно однозначно. Так же, как и в случае φ , непрерывность отображения f^{-1} следует из того, что f непрерывно и имеет компактную область определения.

Множество $K = f(N_1)$ является компактным подмножеством пространства X , гомеоморфным множеству M . $\square$

Лемма Б.4. Пусть X — несчетное борелевское пространство. Тогда существует борелевское подмножество L множества M такое, что X и L борелевски изоморфны.

Доказательство. По определению пространство X гомеоморфно борелевскому подмножеству B полного сепарабельного метрического пространства Y . В силу теорем Урысона и Александрова (предложения 7.2 и 7.3) пространство Y гомеоморфно множеству типа G_δ гильбертова куба H , поэтому B и, следовательно, X гомеоморфны борелевским подмножествам из H . Значит, достаточно показать, что пространство H борелевски изоморфно борелевскому подмножеству множества M .

Идея доказательства заключается в следующем. Любой элемент из H является последовательностью действительных чисел из отрезка $[0, 1]$. Каждое из этих чисел имеет двоичное разложение, и, смешивая все такие разложения, мы получаем элемент из множества M . Сперва определим отображение $\psi: [0, 1] \rightarrow M$, переводящее любое действительное число в последовательность нулей и единиц, являющуюся двоичным разложением этого числа. Проще получить функцию ψ^{-1} , которую мы определим на множестве $M_1 \cup \{(0, 0, 0, \dots)\}$, где

$$M_1 = \{(\mu_1, \mu_2, \dots) \in M \mid \mu_k = 1 \text{ для бесконечно многих } k\}.$$

Эта функция задается формулой

$$\psi^{-1}(\mu_1, \mu_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k / 2^k,$$

и легко проверить, что ψ^{-1} является взаимно однозначным непрерывным отображением на $[0, 1]$. Так как множество $M - M_1$ счетно, то область определения функции ψ^{-1} является борелевским подмножеством множества M , и в силу предложения 7.15 ψ есть борелевский изоморфизм.

Поскольку предложение 7.15 пока не доказано, то непосредственно покажем, что функция ψ измерима по Борелю. Рассмотрим семейство множеств

$$R(k) = \{(\mu_1, \mu_2, \dots) \in M \mid \mu_k = 0\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{R}(k) = \{(\mu_1, \mu_2, \dots) \in M \mid \mu_k = 1\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Эти множества образуют подбазу топологии на множестве M , поэтому, согласно замечанию, следующему за определением 7.6, достаточно только доказать, что множества $\psi^{-1}[R(k)]$ и $\psi^{-1}[\tilde{R}(k)]$ измеримы по Борелю, из чего можно будет заключить, что функция ψ является борелевской. Так как каждое из этих множеств является дополнением другого, то достаточно рассмотреть только множество $\psi^{-1}[R(k)]$. Помня, что областью определения функции ψ^{-1} является множество $M_1 \cup \{(0, 0, 0, \dots)\}$, получаем

$$\psi^{-1}[R(k)] = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{2^j} \mid (\mu_1, \mu_2, \dots) \in M_1, \mu_k = 0 \right\} \cup \{0\}.$$

и множество

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{2^j} \mid (\mu_1, \mu_2, \dots) \in M_1, \mu_k = 0 \right\} =$$

$$= \bigcup_{(\mu_1, \dots, \mu_{k-1})} \left\{ x + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\mu_j}{2^j} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2^k} \right\}$$

представляет собой конечное объединение борелевских множеств.

Доказательство гомеоморфности пространств $MM \dots$ и M в сущности такое же, как и доказательство леммы 7.25, и мы не будем повторять его здесь. Пусть θ — гомеоморфизм $MM \dots$ на M , тогда определим функцию $\varphi: N \rightarrow M$ формулой

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = \theta[\psi(x_1), \psi(x_2), \dots].$$

Легко видеть, что отображение φ — требуемый борелевский изоморфизм. $\square$

Лемма Б.5. Если K_1 и L — борелевские подмножества множества M , $K_1 \subset L$ и K_1 борелевски изоморфно M , то L борелевски изоморфно M .

Доказательство. Для борелевских подмножеств A и B множества M будем писать $A \approx B$, подразумевая под этим, что подмножества A и B борелевски изоморфны. Отметим, что из $A \approx B$ и $B \approx C$ следует $A \approx C$. А также, если $A_1, A_2, \dots$ — последовательность непересекающихся борелевских множеств, $B_1, B_2, \dots$ — некоторая другая аналогичная последовательность и $A_i \approx B_i$ для всех i , то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \approx \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

И наконец, если $A = A_1 \cup A_2$ и $A \approx B$, то $B = B_1 \cup B_2$, где $A_1 \approx B_1$ и $A_2 \approx B_2$, причем, если A_1 и A_2 — непересекающиеся множества, то B_1 и B_2 тоже могут быть выбраны непересекающимися.

В предположениях леммы положим $D_1 = M - K_1$. Так как $M_1 \approx K_1$ и $M = K_1 \cup D_1$, то существуют непересекающиеся борелевские множества K_2 и D_2 такие, что $K_1 = K_2 \cup D_2$, $K_1 \approx K_2$ и $D_1 \approx D_2$. Так как $K_1 \approx K_2$ и $K_1 = K_2 \cup D_2$, то существуют непересекающиеся борелевские множества K_3 и D_3 такие, что $K_2 = K_3 \cup D_3$, $K_2 \approx K_3$ и $D_2 \approx D_3$. Продолжая аналогичным образом, на n -м шаге построим непересекающиеся борелевские множества K_n и D_n такие, что $K_{n-1} = K_n \cup D_n$, $K_{n-1} \approx K_n$ и $D_{n-1} \approx D_n$. Положим $K_{\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Тогда $M = K_{\infty} \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n]$, и все множества в правой части этого равенства непересекающиеся.

Пусть $A_1 = M - L$ и $B_1 = L - K_1$. Тогда множества A_1 и B_1 не пересекаются и $D_1 = A_1 \cup B_1$. Для любого n множество $D_1 \approx D_n$, поэтому $D_n = A_n \cup B_n$, где A_n и B_n — непересекающиеся борелевские множества и $A_1 \approx A_n$, $B_1 \approx B_n$. В частности, $A_n \approx A_{n+1}$ для $n = 1, 2, \dots$, и мы получаем, что

$$M = K_{\infty} \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right] = K_{\infty} \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right] \approx$$

$$\approx K_{\infty} \cup \left[\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right] = \{ K_{\infty} \cup \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right] \} - A_1 = M - A_1 = L. \square$$

Теперь можно доказать предложение 7.16, причем будет видна также справедливость следствия 7.16.1.

Предложение Б.3. Пусть X и Y — борелевские пространства. Пространства X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую мощность.

Доказательство. Если пространства X и Y изоморфны, то ясно, что они должны иметь одинаковую мощность. Если X и Y имеют одинаковую конечную мощность или оба счетны, то их борелевские σ -алгебры являются множествами всех подмножеств этих пространств, и любое взаимно однозначное отображение из одного пространства на другое является борелевским изоморфизмом.

Если X несчетно, то в силу леммы Б.4 существует борелевский изоморфизм $\varphi: X \rightarrow M$ такой, что $L = \varphi(X)$ есть борелевское подмножество множества M . Согласно лемме Б.3 пространство X содержит компактное множество K , гомеоморфное M , поэтому $\varphi(K)$ борелевски изоморфно M и $\varphi(K) \subset L$. Положим $K_1 = \varphi(K)$ и, используя лемму Б.5, получим, что L и M изоморфны. Отсюда следует, что изоморфны X и M . Если пространство Y несчетно, то те же рассуждения показывают, что Y и M изоморфны, следовательно, изоморфны пространства X и Y .

Б.3. Аналитическое множество, неизмеримое по Борелю

Системы Суслина могут быть использованы для построения строго возрастающей последовательности σ -алгебр на любом несчетном борелевском пространстве X . Первой σ -алгеброй в этой последовательности является борелевская σ -алгебра B_X , второй — аналитическая σ -алгебра A_X , и из дальнейшего изложения будет видно, что A_X строго больше, чем B_X . Доказательство этого факта проводится от противного с использованием универсальных функций, которые мы сейчас введем.

Пусть M_1 — множество последовательностей нулей и единиц, в которых единица встречается бесконечное число раз. Если ненулевые компоненты последовательности $m \in M_1$ занимают позиции $m_1, m_2, \dots$, то можно считать последовательность m отображением из N в N , которое определяется соотношением $m(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_{m_1}, \xi_{m_2}, \dots)$.

Определение Б.1. Пусть P является покрытием пространства N . Универсальной функцией L для P называется отображение N на P . Если Q — некоторое другое покрытие пространства N и

$$\{z \in N \mid z \in L[m(z)]\} \in Q \quad \forall m \in M_1, \quad (7)$$

то будем говорить, что L согласована с Q .

Предложение Б.4. Пусть G — совокупность всех открытых подмножеств пространства N . Существует универсальная функция для G , согласованная с G .

Доказательство. Пространство N сепарабельно, поэтому его топология имеет счетную базу $\{G(1), G(2), \dots\}$, причем считаем, что пустое множество содержится среди множеств базы. Определим отображение $L: N \rightarrow G$ соотношением

$$L(\xi_1, \xi_2, \dots) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(\xi_n).$$

Ясно, что L представляет собой универсальную функцию для G . Выберем теперь последовательность $m \in M_1$ и предположим, что ненулевые компоненты m занимают позиции $m_1, m_2, \dots$. Выберем точку $z_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots)$ в множестве

$$\begin{aligned} \{z \in N \mid z \in L[m(z)]\} &= \\ &= \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \mid (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} G(\xi_{m_k})\}. \end{aligned}$$

Тогда для некоторого числа $\bar{k}$ будет $z_0 \in G(\xi_{m\bar{k}}^0)$.

Положим

$$U_{\bar{k}}(z_0) = \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in N \mid \xi_{m\bar{k}} = \xi_{m\bar{k}}^0\}.$$

Тогда $G(\xi_{m\bar{k}}^0) \subset L[m(z)]$ для любого $z \in U_{\bar{k}}(z_0)$, поэтому $z \in L[m(z)]$ для любого $z \in U_{\bar{k}}(z_0) \cap G(\xi_{m\bar{k}}^0)$. Следовательно, множество $U_{\bar{k}}(z_0) \cap G(\xi_{m\bar{k}}^0)$ является открытой окрестностью точки z_0 и содержится в множестве $\{z \in N \mid z \in L[m(z)]\}$, поэтому последнее множество открыто. $\square$

Если заданы пространство с покрытием и универсальная функция для покрытия, которая удовлетворяет условию типа (7), то можно построить аналогичные универсальные функции для более обширных покрытий. Покажем сначала, как это делается для случая, когда заданное покрытие расширяется с помощью систем Суслина.

Предложение Б.5. Пусть P является покрытием для N , и предположим, что существует универсальная функция для P , согласованная с $S(P)$. Тогда существует универсальная функция для $S(P)$, согласованная с $S(P)$.

Доказательство. Зафиксируем разбиение $\{P_s \mid s \in \Sigma\}$ множества натуральных чисел на счетное число счетных множеств и определим для каждого $s \in \Sigma$ соответствующую последовательность $m_s = (\mu_1(s), \mu_2(s), \dots) \in M_1$ следующим образом:

$$\mu_k(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in P_s, \\ 0, & \text{если } k \notin P_s. \end{cases} \quad (8)$$

Пусть L — универсальная функция для P , согласованная с $S(P)$. Определим отображение $K: N \rightarrow S(P)$ соотношением

$$K(z_0) = \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} L[m_s(z_0)]. \quad (9)$$

Для того чтобы показать, что K является отображением на, необходимо показать, что если имеется произвольная система Суслина S для P , то существует точка $z_0 \in N$, для которой

$$S(s) = L[m_s(z_0)] \quad \forall s \in \Sigma. \quad (10)$$

Если задана система $S: \Sigma \rightarrow P$ и $s \in \Sigma$, то $S(s) \in P$. Так как L является универсальной функцией для P , то существует точка $z_s \in N$, для которой $S(s) = L[z_s]$. Если точка z_0 выбрана таким образом, что $m_s(z_0) = z_s$ для любого $s \in \Sigma$, то соотношение (10) выполнено, и такой выбор точки z_0 возможен, потому что $m_s(z_0)$ зависит только от тех компонент z_0 , номера которых принадлежат P_s . Следовательно, K является универсальной функцией для $S(P)$.

Если $m, n \in M_1$, то существует такой элемент в M_1 , обозначим его через mn , что $(mn)(z) = m[n(z)]$ для любого $z \in N$. В самом деле, если ненулевые элементы m — это $(m_1, m_2, \dots)$, а ненулевые элементы n — это $(n_1, n_2, \dots)$, то ненулевые элементы mn будут $(n_{m_1}, n_{m_2}, \dots)$. Предположим теперь, что $m \in M_1$. Множество

$$\begin{aligned} \{z_0 \in N \mid z_0 \in K[m(z_0)]\} &= \{z_0 \in N \mid z_0 \in \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} L[(m_s m)(z_0)]\} = \\ &= \bigcup_{z \in N} \bigcap_{s < z} \{z_0 \in N \mid z_0 \in L[(m_s m)(z_0)]\} \end{aligned}$$

является ядром системы Суслина для $S(P)$, так как L согласовано с $S(P)$. Из предложения Б.2 следует, что K согласована с $S(P)$. $\square$

Следствие Б.5.1. Существует универсальная функция для $S(F_N)$, согласованная с $S(F_N)$.

Доказательство. Пусть G — класс всех открытых подмножеств пространства N . В силу предложений Б.4 и Б.5 существует универсальная функция для $S(G)$, согласованная с $S(G)$, и остается только показать, что $S(G) = S(F_N)$. Так как $G \subset B_N$, то из предложения 7.36 следует, что $S(G) \subset S(F_N)$. Так как всякое замкнутое подмножество пространства N является множеством типа G_δ и в силу предложения 7.35 $G_\delta \subset S(G)_\delta = S(G)$, то мы видим, что $F_N \subset S(G)$. Из предложения Б.2 следует, что $S(F_N) \subset S[S(G)] = S(G)$. $\square$

Следствие Б.5.2. Пусть L — универсальная функция для $S(F_N)$, согласованная с $S(F_N)$. Множество

$$A_0 = \{z \in N \mid z \in L(z)\} \quad (11)$$

является аналитическим, но неизмеримым по Борелю, а множество $N - A_0$ не является аналитическим.

Доказательство. Множество A_0 аналитическое, потому что универсальная функция L согласована с $S(F_N)$. Рассмотрим множество

$$N - A_0 = \{z \in N \mid z \notin L(z)\}. \quad (12)$$

Если это множество аналитическое, то существует точка $z_0 \in N$ такая, что $N - A_0 = L(z_0)$. Если $z_0 \in A_0$, то $z_0 \neq L(z_0)$, что противоречит определению (11). Если $z_0 \in N - A_0$, то $z_0 \in L(z_0)$, что противоречит определению (12). Следовательно, множество $N - A_0$ не является аналитическим и тем более не является борелевским, поэтому множество A_0 также не борелевское. $\square$

Предложение Б.6. Пусть X — несчетное борелевское пространство. Тогда существует аналитическое подмножество A пространства X такое, что A — неизмеримое по Борелю, а $X - A$ не является аналитическим множеством.

Доказательство. Пусть $\varphi: N \rightarrow X$ — борелевский изоморфизм пространства N на X (следствие (7.16.1)), и пусть множество $A_0 \subset N$ такое же, как в следствии Б.5.2. Тогда $A = \varphi(A_0)$ является аналитическим множеством, но так как множество $N - A_0 = \varphi^{-1}(X - A)$ не аналитическое, то не является аналитическим и множество $X - A$. Следовательно, множество A не борелевское. $\square$

Б.4. Предельная σ -алгебра

Мы будем строить семейство σ -алгебр, занумерованных счетными порядковыми числами, и в конце этого процесса получим предельную σ -алгебру, обозначаемую L_X . Доказательство многих свойств σ -алгебры L_X , и даже само определение основываются на трансфинитной индукции. Мы также часто будем использовать тот факт, что если $\{\alpha_n\}$ является последовательностью счетных порядковых чисел, то существует счетное порядковое число $\bar{\alpha}$ такое, что $\alpha_n < \bar{\alpha}$ для всех n . Как обычно принято, первое несчетное порядковое число обозначим через Ω .

Определение Б.2. Пусть X — борелевское пространство и G_X — совокупность всех открытых множеств в пространстве X . Для любого счетного порядкового числа α положим

$$L_X^0 = \sigma(G_X), \quad (13)$$

$$L_X^\alpha = \sigma\left[S\left(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta\right)\right]. \quad (14)$$

Предельной σ -алгеброй называется

$$L_X = \bigcup_{\alpha < \Omega} L_X^\alpha. \quad (15)$$

Мы докажем позднее (предложение Б.10), что L_X в самом деле является σ -алгеброй. Отметим, что $L_X^0 = B_X$ и $L_X^1 = A_X$. Если пространство X счетное, то $B_X = L_X^\alpha$ для всех $\alpha < \Omega$. Если X несчетно, то при рассмотрении σ -алгебр L_X^α и L_X можно, без потери общности, считать, что $X = N$. Об этом говорит следующее утверждение.

Предложение Б.7. Пусть X — несчетное борелевское пространство, и пусть $\varphi: N \rightarrow X$ — борелевский изоморфизм N на X . (Такой изоморфизм существует в силу следствия 7.16.1) Тогда для любого $\alpha < \Omega$

$$\varphi(L_N^\alpha) = L_X^\alpha, \quad L_N^\alpha = \varphi^{-1}(L_X^\alpha) \quad (16)$$

и также

$$\varphi(L_N) = L_X, \quad L_N = \varphi^{-1}(L_X). \quad (17)$$

Доказательство. Докажем равенства (16)–(17) при помощи трансфинитной индукции. Ясно, что для $\alpha = 0$ соотношения (16) выполняются. Если соотношения (16) верны для всех $\beta < \alpha$, где $\alpha < \Omega$, то

$$\varphi\left(\bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta\right) = \bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta, \quad \bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta\right).$$

Пусть S — система Суслина для $\bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta$. Тогда $\varphi[N(S)] = N(\varphi \circ S)$, где $(\varphi \circ S)(s) = \varphi[S(s)] \quad \forall s \in \Sigma$. Так как $\varphi \circ S$ является системой Суслина для $\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta$, то видно, что

$$\varphi[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta)] \subset S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta). \quad (18)$$

С другой стороны, если R является системой Суслина для $\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta$, то $N(R) = \varphi[N(\varphi^{-1} \circ R)]$, где

$$(\varphi^{-1} \circ R)(s) = \varphi^{-1}[R(s)] \quad \forall s \in \Sigma.$$

Отсюда видно, что $N(R) \in \varphi[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta)]$, и это доказывает обратное к (18) включение множеств. Следовательно,

$$\varphi[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta)] = S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta). \quad (19)$$

Так как отображение φ взаимно однозначное, то и

$$S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta) = \varphi^{-1}[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta)]. \quad (20)$$

Далее, в силу соотношения (19) $\varphi(L_N^\alpha)$ является σ -алгеброй, содержащей $S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta)$, поэтому

$$\varphi(L_N^\alpha) \supset L_X^\alpha. \quad (21)$$

В силу соотношения (20) $\varphi^{-1}(L_X^\alpha)$ является σ -алгеброй, содержащей $S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_N^\beta)$, поэтому

$$L_N^\alpha \subset \varphi^{-1}(L_X^\alpha). \quad (22)$$

Так как φ — взаимно однозначное отображение, то из включения (21) следует, что

$$L_N^\alpha \supset \varphi^{-1}(L_X^\alpha), \quad (23)$$

а из включения (22) следует, что

$$\varphi(L_N^\alpha) \subset L_X^\alpha. \quad (24)$$

Из соотношений (21)–(24) вытекает соотношение (16). Соотношение (17) следует из соотношений (15) и (16). $\square$

Как мы уже видели, для счетного борелевского пространства X σ -алгебра L_X^0 находится строго внутри L_X^1 (предложение Б.6). Мы хотим доказать, что вообще, если $\beta < \alpha < \Omega$, то L_X^β лежит строго внутри L_X^α . Для доказательства этого факта мы обобщим следствие Б.5.1, а затем — следствие Б.5.2. Шагом в этом направлении являются следующие леммы. Если P — покрытие пространства X , то через $\bar{P}$ обозначается покрытие

$$\bar{P} = P \cup \{X - P \mid P \in P\}. \quad (25)$$

Лемма Б.6. Пусть P — покрытие пространства N , содержащее все открытые множества в пространстве N , и предположим, что существует универсальная функция для P , согласованная с P . Тогда существует универсальная функция для $\bar{P}$, согласованная с $\sigma(P)$.

Доказательство. Пусть L — универсальная функция для P , согласованная с P . Определим отображение $K: N \rightarrow \bar{P}$, полагая

$$K(\xi_1, \xi_2, \dots) = \begin{cases} L(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots), & \text{если } \xi_1 \text{ нечетно,} \\ N - L(\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots), & \text{если } \xi_1 \text{ четно.} \end{cases}$$

Ясно, что K является универсальной функцией для $\bar{P}$. Так же, как при доказательстве предложения Б.4, выберем $m \in M_1$ и предположим, что ненулевые компоненты m занимают позиции $m_1, m_2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} \{z \in N \mid z \in K[m(z)]\} &= \\ &= \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_{m_1} \text{ нечетно и } (\xi_1, \xi_2, \dots) \in L(\xi_{m_2}, \xi_{m_3}, \dots)\} \cup \\ &\cup \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_{m_1} \text{ — четно и } (\xi_1, \xi_2, \dots) \notin L(\xi_{m_2}, \xi_{m_3}, \dots)\} = \\ &= ([\bigcup_{k=1}^{\infty} \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_{m_1} = 2k - 1\}] \cap \\ &\cap \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid (\xi_1, \xi_2, \dots) \in L(\xi_{m_2}, \xi_{m_3}, \dots)\}) \cup \\ &\cup ([\bigcup_{k=1}^{\infty} \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_{m_1} = 2k\}] \cap \\ &\cap \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid (\xi_1, \xi_2, \dots) \notin L(\xi_{m_2}, \xi_{m_3}, \dots)\}). \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку универсальная функция L согласована с P и P содержит любое открытое множество, то получим, что любое множество вида (26) принадлежит $\sigma(P)$. Следовательно, функция K согласована с $\sigma(P)$. $\square$

Лемма Б.7. Пусть α — счетное порядковое число. Пусть P_β для любого $\beta < \alpha$ является покрытием пространства N , содержащим семейство G всех открытых множеств, и предположим, что существует универсальная функция L_β для P_β , согласованная с P_β . Тогда существует универсальная функция для $\bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta$, согласованная с $S(\bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta)$.

Доказательство. Множество порядковых чисел $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ счетно, если только $\alpha < \Omega$, поэтому существует разбиение $\{P(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ натуральных чисел такое, что $P(\beta)$ не пусто для любого $\beta < \alpha$. Определим универсальную функцию для $\bigcup_{\beta < \alpha} P(\beta)$, полагая

$$L(\xi_1, \xi_2, \dots) = L_\beta(\xi_2, \xi_3, \dots) \text{ при } \xi_1 \in P(\beta).$$

Пусть $m \in M_1$ имеет ненулевые компоненты $m_1, m_2, \dots$. Тогда

$$\{z \in N \mid z \in L[m(z)]\} = \bigcup_{\beta < \alpha} \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_{m_1} \in P(\beta)\}$$

$$\text{и } (\xi_1, \xi_2, \dots) \in L_\beta(\xi_{m_2}, \xi_{m_3}, \dots) = \bigcup_{\beta < \alpha} \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_{m_1} \in$$

$$\in P(\beta)\} \cap \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid (\xi_1, \xi_2, \dots) \in L_\beta(\xi_{m_2}, \xi_{m_3}, \dots)\}$$

и это множество содержится в $S(\bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta)$ в силу предложения 7.35 (б) и (в) и того факта, что любая универсальная функция L_β согласована с P_β . $\square$

Предложение Б.8. Для любого $\alpha < \Omega$ существует универсальная функция для $S(L_N^\alpha)$, согласованная с $S(L_N^\alpha)$.

Доказательство. Для простоты обозначений опустим индекс N . Доказательство проведем с помощью трансфинитной индукции. Для $\alpha = 0$ результат получается из следствия Б.5.1. Предположим теперь, что результат справедлив для всех $\beta < \alpha$, где $\alpha < \Omega$. Докажем его для α . Согласно лемме Б.7 и предположению индукции существует универсальная функция для $\bigcup_{\beta < \alpha} S(L^\beta)$, согласованная с $S[\bigcup_{\beta < \alpha} S(L^\beta)]$. Далее,

$$\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta \subset \bigcup_{\beta < \alpha} S(L^\beta) \subset S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta), \quad (27)$$

и, применяя S к обеим частям соотношения (27) и используя предложение Б.2, получаем, что

$$S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta) = S[\bigcup_{\beta < \alpha} S(L^\beta)]. \quad (28)$$

Из предложения Б.5 и соотношения (28) следует существование универсальной функции для $S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)$, согласованной с $S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)$, а из леммы Б.6 следует существование универсальной функции для $\overline{S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)}$, согласованной с L^α . Из следствия 7.35.1 имеем, что

$$L^\alpha = \sigma[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)] \subset S[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)], \quad (29)$$

поэтому существует универсальная функция для $\overline{S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)}$, согласованная с $S[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)]$. Но из соотношения (29) следует, что

$$L^\alpha \subset S[\overline{S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)}] \subset S(L^\alpha),$$

и, применяя S к обеим частям последнего соотношения, видим, что

$$S(L^\alpha) = S[S(\bigcup_{\beta < \alpha} L^\beta)]. \quad (30)$$

Из предложения Б.5 и соотношения (30) получаем теперь существование универсальной функции для $S(L^\alpha)$, согласованной с $S(L^\alpha)$. $\square$

Предложение Б.9. Пусть X — несчетное борелевское пространство. Если $\beta < \alpha < \Omega$, то L_X^β лежит строго внутри L_X^α .

Доказательство. Не теряя общности, можем считать, что $X = N$ (предложение Б.7). Опустим индексы N . Ясно, что для $\beta < \alpha$ мы имеем $L^\beta \subset L^\alpha$. Пусть L — универсальная функция для $S(L^\beta)$, согласованная с $S(L^\beta)$, и рассмотрим множество $A = \{z \in N \mid z \in L(z)\}$. Тогда $A \in S(L^\beta)$. Если бы $N - A \in S(L^\beta)$, то для некоторой точки $z_0 \in N$ мы имели бы равенство $N - A = L(z_0)$. Если $z_0 \in A$, то $z_0 \notin L(z_0)$, и мы получаем противо-

речие. Если $z_0 \in N - A$, то $z_0 \in L(z_0)$, и мы снова получаем противоречие. Значит, $N - A \notin S(L^\beta)$. Но $N - A \in L^\alpha$, поэтому L^β не совпадает с L^α . $\square$

Предложение Б.10. Пусть X — борелевское пространство. Предельная σ -алгебра L_X содержится в U_X и

$$L_X = S(L_X). \quad (31)$$

Более того, L_X является наименьшей σ -алгеброй, содержащей открытые подмножества пространства X , которая удовлетворяет соотношению (31).

Доказательство. Если X — счетное пространство, то результат тривиален, поэтому предположим, что X несчетно. Ясно, что $\emptyset \in L_X$ и L_X замкнуто относительно взятия дополнения. Поэтому, чтобы убедиться в том, что L_X является σ -алгеброй, необходимо только проверить, что L_X замкнуто относительно взятия счетных объединений. Если $Q_1, Q_2, \dots$ — последовательность множеств из L_X , то для некоторого $\alpha < \Omega$ мы имеем $Q_k \in L_X^\alpha$ при всех k . В таком случае $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \in L_X^\alpha \subset L_X$.

Докажем с помощью трансфинитной индукции, что $L_X^\alpha \subset U_X$ при всех $\alpha < \Omega$. Для $\alpha = 0$ это очевидно. Если $L_X^\beta \subset U_X$ для всех $\beta < \alpha$, где $\alpha < \Omega$, то в силу теоремы Лузина (предложение 7.42) $S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta) \subset U_X$. Но тогда и $L_X^\alpha \subset U_X$. Следовательно, $L_X \subset U_X$.

Докажем теперь равенство (31). Как следует из предложения 7.35 (г), достаточно доказать, что $L_X \supset S(L_X)$. Пусть S является системой Суслина для L_X . Так как множество Σ счетно, то существует число $\alpha < \Omega$ такое, что $S(s) \in L_X^\alpha$ при любом $s \in \Sigma$. Тогда $N(S) \in L_X^{\alpha+1} \subset L_X$, что и доказывает (31).

Предположим, что P является σ -алгеброй, содержащей открытые подмножества пространства X , удовлетворяющей условию $P = S(P)$. Ясно, что $B_X = L_X^0 \subset P$. Если $L_X^\beta \subset P$ для любого $\beta < \alpha$, где $\alpha < \Omega$, то из соотношения (14) следует, что $L_X^\alpha \subset P$. Поэтому P содержит σ -алгебру L_X . Значит, L_X — наименьшая σ -алгебра, содержащая открытые множества в X и удовлетворяющая равенству (31). $\square$

Главный недостаток аналитической σ -алгебры заключается в том, что суперпозиция аналитически измеримых функций не обязательно является аналитически измеримой (ср. замечания вслед за предложением 7.50). Однако суперпозиция предельно измеримых функций является предельно измеримой. Мы докажем эти утверждения после того, как дадим формальное определение соответствующих терминов.

Определение Б.3. Пусть X и Y — борелевские пространства, $D \subset X$ и P является σ -алгеброй в X . Говорят, что функция $f: D \rightarrow Y$ является P -измеримой, если $f^{-1}(B) \in P$ для любого множества $B \in B_Y$. Если $P = L_X$, то будем говорить, что функция f предельно измерима. Говорят, что σ -алгебра P замкнута относительно суперпозиции функций, если для любой P -измеримой функции $f: X \rightarrow X$ и любого $P \in P$ имеем $f^{-1}(P) \in P$.

В определении Б.3 не говорится о P -измеримой функции g , отображающей X в борелевское пространство Y , с которой образуется суперпозиция функции f . Если бы имелась такая функция g , то для проверки P -измеримости функции $g \circ f: X \rightarrow Y$ нужно было бы проверить, что множество $f^{-1}[g^{-1}(B)]$ является P -измеримым для любого множества $B \in B_Y$. Так как $g^{-1}(B) \in P$, то достаточно проверить, что $f^{-1}(P) \in P$ для любого множества $P \in P$; именно это условие и содержится в определении Б.3. Требование в определении Б.3, чтобы функция f имела одинаковую область определения и пространство значений, не является ограничением, по крайней мере, если $P = L_X^\alpha$ для некоторого $\alpha < \Omega$ или $P = L_X$ (см. предложе-

ние Б.7). Только эти случаи нам и нужны. Как показывает следующая лемма, существует тесная связь между замкнутостью σ -алгебры относительно суперпозиции отображений и справедливостью уравнения типа (31).

Лемма Б.8. Пусть X — борелевское пространство, и пусть $\mathcal{P}$ является σ -алгеброй в X . Если $\mathcal{P}$ содержит аналитические множества пространства X и замкнута относительно суперпозиции функций, то

$$\mathcal{P} = \mathcal{S}(\mathcal{P}).$$

Доказательство. Если пространство X счетно, то результат тривиален, поэтому предположим, что X несчетно. В силу предложения 7.35 (г) достаточно показать, что в предположениях леммы имеет место включение $\mathcal{P} \supset \mathcal{S}(\mathcal{P})$. Чтобы доказать это, для произвольной системы Суслина S для $\mathcal{P}$ построим $\mathcal{P}$ -измеримую функцию $f: X \rightarrow X$ и множество $P \in \mathcal{P}$ такие, что

$$f^{-1}(P) = N(S). \quad (32)$$

Пусть $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$ — борелевский изоморфизм $\mathbb{N}$ на X (следствие 7.16.1), и пусть ψ — взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел на Σ . Для $k = 1, 2, \dots$ определим функции $\bar{f}_k: \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2\}$ формулой

$$\bar{f}_k(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(z) \in S[\psi(k)], \\ 2 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и функцию $\bar{f}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ соотношением $\bar{f}(z) = [\bar{f}_1(z), \bar{f}_2(z), \dots]$.

Наконец, пусть функция $f: X \rightarrow X$ задается равенством $f = \varphi \circ \bar{f} \circ \varphi^{-1}$. Покажем, что функция f является $\mathcal{P}$ -измеримой. Или, что эквивалентно, убедимся в $\mathcal{P}$ -измеримости функции $\bar{f} \circ \varphi^{-1}: X \rightarrow \mathbb{N}$. Но функция $\bar{f} \circ \varphi^{-1}$ принимает значения в множестве $\{(\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{N} \mid \xi_n \leq 2 \forall n\}$, которое имеет в качестве подбазы семейство открытых множеств

$$\{R(k), \tilde{R}(k) \mid k = 1, 2, \dots\},$$

где

$$\begin{aligned} R(k) &= \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_n \leq 2 \quad \forall n \text{ и } \xi_k = 1\}, \\ \tilde{R}(k) &= \{(\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_n \leq 2 \quad \forall n \text{ и } \xi_k = 2\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Согласно замечанию, следующему за определением 7.6, из $\mathcal{P}$ -измеримости множеств

$$\varphi(\bar{f}^{-1}[R(k)]) = S[\psi(k)], \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi(\bar{f}^{-1}[\tilde{R}(k)]) = X - S[\psi(k)], \quad k = 1, 2, \dots,$$

вытекает $\mathcal{P}$ -измеримость функции $\bar{f} \circ \varphi^{-1}$. Это в свою очередь означает $\mathcal{P}$ -измеримость функции f .

Определим множество $P \subset X$ равенством

$$P = \bigcup_{z \in \mathbb{N}} \bigcap_{s < z} \varphi(R[\psi^{-1}(s)]),$$

где $R(k)$ задается соотношением (33). Тогда P является аналитическим множеством в пространстве X , поэтому $P \in \mathcal{P}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) &= \varphi \left[\bigcup_{z \in \mathbb{N}} \bigcap_{s < z} \bar{f}^{-1}(R[\psi^{-1}(s)]) \right] = \\ &= \bigcup_{z \in \mathbb{N}} \bigcap_{s < z} S(s) = N(S), \end{aligned}$$

так что равенство (32) выполняется. $\square$

Предложение Б.11. Пусть X — борелевское пространство. Предельная σ -алгебра L_X является наименьшей σ -алгеброй, содержащей аналитические подмножества пространства X , замкнутой относительно суперпозиции функций.

Доказательство. Покажем сначала, что L_X замкнута относительно суперпозиции функций. Достаточно показать, что если $f: X \rightarrow X$ является L_X -измеримой функцией, $\alpha < \Omega$ и $Q \in L_X^\alpha$, то $f^{-1}(Q) \in L_X$. Если $\alpha = 0$, то это верно по определению. Предположим, что при некотором $\alpha < \Omega$ для любых $\beta < \alpha$ и $C \in L_X^\beta$ имеет место соотношение $f^{-1}(C) \in L_X$. Покажем, что тогда $f^{-1}(Q) \in L_X$ для любого множества $Q \in S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta)$, и отсюда будет следовать, что $f^{-1}(Q) \in L_X$ для любого $Q \in L_X^\alpha$. Выберем множество $Q \in S(\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta)$, и пусть S — такая система Суслина для $\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta$, что $Q = N(S)$. Тогда

$$f^{-1}(Q) = N(f^{-1} \circ S), \quad (34)$$

где $f^{-1} \circ S$ — система Суслина, определяемая формулой

$$(f^{-1} \circ S)(s) = f^{-1}[S(s)] \quad \forall s \in \Sigma.$$

Согласно предположению индукции $f^{-1} \circ S$ является системой Суслина для L_X , и из предложения Б.10 и равенства (34) получаем, что $f^{-1}(Q) \in L_X$.

Тогда факт, что L_X является наименьшей σ -алгеброй, содержащей аналитические подмножества X , замкнутой относительно суперпозиции, следует из предложения Б.10 и леммы Б.8. $\square$

Следствие Б.11.1. Пусть X, Y и Z — несчетные борелевские пространства. Если функции $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ предельно измеримы, то функция $g \circ f: X \rightarrow Z$ также предельно измерима. В частности, если f и g аналитически измеримы, то $g \circ f$ предельно измерима. Можно подобрать такие аналитически измеримые функции f и g , чтобы функция $g \circ f$ не была аналитически измеримой.

Доказательство. Из предложения Б.9 следует, что σ -алгебры A_X, A_Y и A_Z содержатся строго внутри соответствующих σ -алгебр L_X, L_Y и L_Z . Остается применить предложение Б.7 к результатам предложения Б.11. $\square$

Используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись для первой части доказательства предложения Б.11, читатель может проверить, что если функции $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ аналитически измеримы, то функция $g \circ f$ на самом деле L_X^2 -измерима. Вообще, можно показать по индукции, что если функция f является L_X^m -измеримой, а $g — L_X^n -измеримой, где m и n — целые числа, то функция $g \circ f$ является L_X^{m+n} -измеримой.$

Пусть X — борелевское пространство. Для любого множества $Q \in U_X$ определим функцию $\theta_Q: P(X) \rightarrow [0, 1]$ соотношением

$$\theta_Q(p) = p(Q). \quad (35)$$

Тогда функция θ_Q универсально измерима (следствие 7.46.1). Если множество Q борелевское, то функция θ_Q является борелевской (предложение 7.25), а если Q аналитически измеримо, то функция θ_Q аналитически измерима (предложение 7.43).

Рассмотрим теперь случай, когда множество Q является L_X^α -измеримым.

Предложение Б.12. Пусть X — борелевское пространство. Если множество $Q \in L_X$, то функция θ_Q , определенная соотношением (35), является $L_{P(X)}$ -измеримой. Более того, если $\alpha < \Omega$ и $Q \in L_X^\alpha$, то θ_Q является $L_{P(X)}^\alpha$ -измеримой.

Доказательство. Последнее утверждение справедливо при $\alpha = 0$. Если оно справедливо для всех $\beta < \alpha$, где $\alpha < \Omega$; и S — система Суслина для $\bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta$, то для любого числа $c \in R$ выполняется соотношение (98) из главы 7, где $A = N(S)$ и $K(s)$ определяется равенством (92) из главы 7. Для любого элемента $s \in \Sigma$ множество $K(s) \in \bigcup_{\beta < \alpha} L_X^\beta$, поэтому, по предположению индукции, множество $\{p \in P(X) \mid p[K(s)] \geq c - (1/n)\}$ принадлежит $\bigcup_{\beta < \alpha} L_{P(X)}^\beta$.

Из соотношения (98) главы 7 и предложения 7.35 (б) следует, что

$$\{p \in P(X) \mid p[N(S)] \geq c\} \in \mathcal{S}(\bigcup_{\beta < \alpha} L_{P(X)}^\beta) \subset L_{P(X)}^\alpha.$$

Таким образом, если $Q \in \mathcal{S}(\bigcup_{\beta < \alpha} L_{P(X)}^\beta)$, то функция θ_Q является $L_{P(X)}^\alpha$ -измеримой. Семейство множеств Q , для которых функции θ_Q являются $L_{P(X)}^\alpha$ -измеримыми, образует систему Дынкина, поэтому по теореме о системе Дынкина (предложение 7.24) функция θ_Q является $L_{P(X)}^\alpha$ -измеримой для любого множества $Q \in L_X^\alpha$. Это завершает индукцию.

Если $Q \in L_X$, то $Q \in L_X^\alpha$ для некоторого $\alpha < \Omega$, поэтому θ_Q является $L_{P(X)}^\alpha$ -измеримой и, следовательно, θ_Q является $L_{P(X)}$ -измеримой.

Б.5. Теоретико-множественные аспекты борелевских пространств

Свойства измеримости борелевских пространств тесно связаны с рядом вопросов теории множеств, по краю которых мы шли, не затрагивая их. Коснемся теперь этих вопросов.

В прикладной математике отношение к аксиоме выбора и канторовской гипотезе континуума неоднозначное. Первая обычно принимается, а ко второй относятся с недоверием. Общая аксиома выбора утверждает, что для произвольного заданного множества индексов A и любого семейства непустых множеств $\{S_\alpha \mid \alpha \in A\}$ существует функция $f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ такая, что $f(\alpha) \in S_\alpha$ при любом $\alpha \in A$. Мы использовали эту аксиому в приложении А для построения примеров. В частности, множество E из примера 1 этого приложения, для которого как E , так и E^c имеют внешнюю p -меру единица, было построено с помощью аксиомы выбора. Мы также использовали эту аксиому для построения множества S при доказательстве леммы Б.3, а эта лемма послужила основным инструментом в доказательстве изоморфизма всех несчетных борелевских пространств (предложение Б.3 и следствие 7.16.1). Существует, однако, другое доказательство леммы Б.3, не использующее аксиомы выбора, но оно очень громоздко, и мы его не приводим.

Счетная аксиома выбора — это то же, что общая аксиома выбора, только множество индексов A в ней счетное. Другая формулировка этой аксиомы заключается в том, что для любого счетного семейства непустых множеств из каждого множества можно выбрать по одному элементу. Мы широко использовали эту аксиому, например, при выборе для каждого k селектора φ_k в доказательстве предложения 7.50 (а). На самом деле большая часть математического анализа и топологии основаны на счетной аксиоме выбора.

Соловей [82] показал, что если общую аксиому выбора заменить более слабым "принципом зависимости выбора", который все еще сильнее счетной аксиомы выбора, то можно допустить, что любое множество на действительной прямой измеримо по Лебегу*). Несложное обобщение этого результата показывает, что при том же условии можно допустить универсальную измеримость любого множества в произвольном борелевском пространстве. Следовательно, при соответствующем выборе системы аксиом можно заставить исчезнуть трудности, связанные с измеримостью, составляющие содержание части II.

Не используя аксиому выбора, можно показать, что любое несчетное борелевское пространство X содержит универсально измеримые множества, не являющиеся предельно измеримыми. Неопубликованное доказательство этого принадлежит Ричарду Локхарту. Если принять и аксиому выбора, и гипотезу континуума, то окажется, что σ -алгебра U_X имеет большую мощность, чем L_X . Так как $V_X \subset L_X^\alpha$ для любого порядкового числа $\alpha < \Omega$, и V_X имеет мощность не меньше c , то такую же мощность имеет L_X^α . С другой стороны, $L_X^\alpha \subset S(L_X^\alpha)$, и существует универсальная функция для $S(L_X^\alpha)$, поэтому мощность L_X^α равна c . Так как $L_X = \bigcup_{\alpha < \Omega} L_X^\alpha$ и мощность множества счетных порядковых чисел меньше или равна c , то L_X имеет мощность c .

С другой стороны, если использовать аксиому выбора и гипотезу континуума Кантора, то σ -алгебра U_X содержит множество F мощности c , имеющее меру, равную нулю относительно любой неатомической вероятностной меры [41, глава III, раздел 14]. В таком случае любое подмножество из F также содержится в U_X , и мощность U_X не меньше 2^c . Следовательно, σ -алгебра L_X не может совпадать с U_X .

Другая примыкающая теоретико-множественная работа принадлежит Гёделю [36], показавшему, что предположение о существовании дополнения аналитического множества в единичном квадрате, проекция которого на одну из осей неизмерима по Лебегу, совместимо с обычными аксиомами теории множеств. Это означает совместимость с обычными аксиомами предположения о существовании аналитически измеримой функции $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow R$ такой, что функция $f^*(x) = \inf_y f(x, y)$ не измерима по Лебегу. Это накладывает жесткие ограничения на возможные усиления предложения 7.47.

Приложение В

ХАУСДОРФОВА МЕТРИКА И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

В этом приложении исследуется метрическая топология в семействе замкнутых подмножеств (включая пустые множества $\emptyset$) компактного метрического пространства (X, d) . Сбозначим это семейство множеств через 2^X . Для множества $A \in 2^X$ и точки $x \in X$ определим расстояния

$$d(x, A) = \min_{a \in A} d(x, a), \quad A \neq \emptyset, \quad (1)$$

$$d(x, \emptyset) = \text{diam}(X) = \max_{y, z \in X} d(y, z). \quad (2)$$

*) То есть приняв это допущение, нельзя прийти к противоречию. (Прим ред.)

Определение В.1. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство. Хаусдорфова метрика ρ в пространстве 2^X определяется следующим образом:

$$\rho(A, B) = \max \{ \max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A) \}, \quad \text{если } A, B \neq \emptyset, \quad (3)$$

$$\rho(A, \emptyset) = \rho(\emptyset, A) = \text{diam}(X), \quad A \neq \emptyset, \quad (4)$$

$$\rho(\emptyset, \emptyset) = 0. \quad (5)$$

В выражении (3) мы написали $\max$ вместо $\sup$, так как любое множество семейства 2^X компактно и $d(x, A)$ является непрерывной функцией x для любого множества $A \in 2^X$. Чтобы убедиться в последнем, рассмотрим множество $A \in 2^X$. Если $A = \emptyset$, то функция $d(x, A)$ является константой и, следовательно, непрерывна. Если $A \neq \emptyset$, то для $x, y \in X$ и $a \in A$ имеем

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Взяв инфимум от обеих частей неравенства по $a \in A$, получим

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Меняя ролями x и y , получим неравенство

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X, \quad (6)$$

которое показывает, что $d(x, A)$ является непрерывной функцией от x , удовлетворяющей условию Липшица.

Проверка того, что $(2^X, \rho)$ является метрическим пространством, осуществляется непосредственно, но является довольно длинной, и мы предоставляем ее читателю. Мы же докажем, что $(2^X, \rho)$ является компактным метрическим пространством. Сначала получим некоторые предварительные результаты.

Для (не обязательно замкнутого) подмножества A множества X положим $2^A = \{K \in 2^X \mid K \subset A\}$. Определим два класса множеств:

$$G = \{2^G \mid G - \text{открытое подмножество множества } X\}, \quad (7)$$

$$K = \{2^K - 2^K \mid K - \text{замкнутое подмножество множества } X\}. \quad (8)$$

Чтобы помочь читателю, будем продолжать обозначать точки множества X прописными латинскими буквами, а подмножества множества X заглавными латинскими буквами. Заглавные полужирные буквы будут использоваться для обозначения подмножеств семейства 2^X ; исключение будут составлять подмножества вида 2^A , определенные выше.

Придерживаясь этой практики, обозначим открытые сферы в введенных двух пространствах следующим образом:

$$S_\epsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}, \quad S_\epsilon(A) = \{B \in 2^X \mid \rho(A, B) < \epsilon\}.$$

Наконец, классы подмножеств семейства 2^X будут обозначаться полужирными буквами, как это было сделано выше при определении G и K .

Топология, получаемая, если в качестве подбазы в пространстве 2^X взять объединение $G \cup K$, называется *экспоненциальной топологией*. Для такой топологии развита обширная теория [46, 47]. Аналогичная теория может быть развита и для неметризуемого пространства X , однако нас интересуют только результаты, относящиеся к случаю, когда X является компактным метрическим пространством. Как мы покажем теперь, в последнем случае экспоненциальная топология есть топология, порожаемая хаусдорфовой метрикой.

Предложение В.1. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а ρ — хаусдорфова метрика в 2^X . Класс $G \cup K$, определенный равенствами (7) и (8), является подбазой топологии в пространстве $(2^X, \rho)$.

Доказательство. Сначала докажем, что если подмножество G открыто, а подмножество K замкнуто в X , то множества 2^G и $2^X - 2^K$ открыты в $(2^X, \rho)$. Если G или K пусто, то легко увидеть, что множество 2^G или соответственно $2^X - 2^K$ открыто, поэтому будем предполагать, что подмножества G и K непустые.

Пусть A — замкнутое непустое подмножество пространства X и $A \in 2^G$. (Доказательство для $A = \emptyset$ тривиально.) Так как A компактно и является подмножеством множества G , а множество $X - G$ замкнуто, то существует число ϵ такое, что $0 < \epsilon < \text{diam}(X)$ и

$$\min_{a \in A} d(a, X - G) \geq \epsilon. \quad (9)$$

Для множества $B \in S_\epsilon(A)$ имеем $B \neq \emptyset$ и

$$\max_{b \in B} d(b, A) < \epsilon. \quad (10)$$

Из неравенств (9) и (10) вытекает, что $B \subset G$. Следовательно, $S_\epsilon(A) \subset 2^G$, и множество 2^G должно быть открытым.

Переходя к множеству $2^X - 2^K$ для замкнутого K , рассмотрим непустое множество $A \in 2^X - 2^K$. По определению $A \not\subset 2^K$, поэтому множество $A - K$ содержит по крайней мере одну точку a_0 . Так как множество $X - K$ открыто, мы можем найти такое число $\epsilon > 0$, для которого $S_\epsilon(a_0) \subset X - K$. Для множества $B \in S_\epsilon(A)$ имеем

$$d(a_0, B) \leq \max_{a \in A} d(a, B) < \epsilon,$$

откуда следует, что $B \cap S_\epsilon(a_0) \neq \emptyset$ и $B \in 2^X - 2^K$. Следовательно, $S_\epsilon(A) \subset 2^X - 2^K$ и множество $2^X - 2^K$ открыто.

Показав, таким образом, что множества 2^G и $2^X - 2^K$ открыты в $(2^X, \rho)$, если G открыто, а K замкнуто, мы теперь должны доказать, что для любых открытого множества $G \in (2^X, \rho)$ и непустого $A \in G$ можно найти открытые множества $G_1, G_2, \dots, G_m$ и замкнутые множества $K_1, K_2, \dots, K_n$ в X , для которых

$$A \in 2^{G_1} \cap \dots \cap 2^{G_m} \cap (2^X - 2^{K_1}) \cap \dots \cap (2^X - 2^{K_n}) \subset G.$$

Так как G открыто в $(2^X, \rho)$, то существует число $\epsilon > 0$ такое, что $S_\epsilon(A) \subset G$. Так как множество A замкнуто в компактном пространстве X , то существуют точки $\{x_1, \dots, x_n\}$ в множестве A такие, что $A \subset \bigcup_{k=1}^n S_{\epsilon/2}(x_k)$. Положим

$$G_1 = \{x \in X \mid d(x, A) < \epsilon\}$$

и

$$K_k = X - S_{\epsilon/2}(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

По построению $A \in 2^{G_1}$ и так как $A \cap S_{\epsilon/2}(x_k) \neq \emptyset$ для любого k , то $A \in 2^X - 2^{K_k}$. Следовательно,

$$A \in 2^{G_1} \cap (2^X - 2^{K_1}) \cap \dots \cap (2^X - 2^{K_n}).$$

Предположим, что B является другим множеством в $2^{G_1} \cap (2^X - 2^{K_1}) \cap \dots \cap (2^X - 2^{K_n})$. Из того факта, что $B \in 2^{G_1}$, следует неравенство

$$\max_{b \in B} d(b, A) < \epsilon. \quad (11)$$

Если бы для некоторого $a_0 \in A$ выполнялось неравенство $d(a_0, B) \geq \epsilon$, то мы имели бы также $S_\epsilon(a_0) \subset X - B$. Но $a_0 \in S_{\epsilon/2}(x_k)$ для некоторой точки $x_k \in A$, и отсюда последовательно вытекало бы, что $S_{\epsilon/2}(x_k) \subset X - B$, $B \subset K_k$ и $B \not\subset 2^X - 2^{K_k}$. Это противоречие приводит к выводу, что

$$\max_{a \in A} d(a, B) < \epsilon. \quad (12)$$

Неравенства (11) и (12) означают, что $\rho(A, B) < \epsilon$, и как следствие

$$2^{G_1} \cap (2^X - 2^{K_1}) \cap \dots \cap (2^X - 2^{K_n}) \subset S_\epsilon(A) \subset G. \quad \square$$

Если покрытие пространства не содержит ни одного конечного подпокрытия, то будем говорить, что покрытие является *существенно бесконечным*. Для того чтобы показать компактность пространства $(2^X, \rho)$, если компактно пространство X , нам нужно убедиться, что не существует ни одного существенно бесконечного открытого покрытия пространства 2^X . Благодаря приводимой ниже лемме, мы сможем показать, что подбаза $G \cup K$ не содержит ни одного существенно бесконечного покрытия. Напомним читателю, что топологическое пространство, в котором любое открытое покрытие имеет счетное подпокрытие, называется *пространством Линделефа*, и для метризуемых пространств это свойство эквивалентно сепарабельности.

Лемма В.1. Пусть Ω — пространство Линделефа, и пусть S — подбаза топологии в Ω . Если существует какое-либо существенно бесконечное открытое покрытие пространства Ω , то существует такое же покрытие, являющееся подмножеством S .

Доказательство. Пусть B — база топологии в пространстве Ω , построенная посредством взятия конечных пересечений множеств подбазы S , и пусть C — существенно бесконечное открытое покрытие пространства Ω . Любое множество $C \in C$ допускает представление $C = \bigcup_{\alpha \in A(C)} B_\alpha$, где $B_\alpha \in B$ при любом $\alpha \in A(C)$. Семейство $\bigcup_{C \in C} \{B_\alpha \mid \alpha \in A(C)\}$ представляет собой существенно бесконечное открытое покрытие пространства Ω и в силу свойства Линделефа оно содержит счетное существенно бесконечное открытое подпокрытие $D = \{B_1, B_2, \dots\}$.

Любое множество B_k допускает представление $B_k = \bigcap_{j=1}^{n(k)} S_{kj}$, где $S_{kj} \in S$, $j = 1, \dots, n(k)$. Если бы для каждого j покрытие $D_j = \{S_{1j}, B_2, B_3, \dots\}$ не было существенно бесконечным, то существовало бы конечное подсемейство $\bar{D}_j$, которое также покрывало бы пространство Ω . Но тогда множество

$$\{B_1\} \cup \left[\bigcup_{j=1}^{n(1)} (\bar{D}_j - \{S_{1j}\}) \right] \subset D$$

было бы конечным подпокрытием пространства Ω . Из полученного противоречия следует, что для некоторого j_0 покрытие D_{j_0} существенно бесконечно.

Обозначим $R_1 = S_{1j_0}$. Вообще, если даны множества $R_1, R_2, \dots, R_n$ из S такие, что $B_k \subset R_k, k = 1, \dots, n$ и $\{R_1, R_2, \dots, R_n, B_{n+1}, B_{n+2}, \dots\}$ является существенно бесконечным открытым покрытием пространства Ω , то, используя предыдущие рассуждения, мы можем построить множество $R_{n+1} \in S$, для которого $B_{n+1} \subset R_{n+1}$ и $\{R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}, B_{n+2}, B_{n+3}, \dots\}$ является существенно бесконечным открытым покрытием пространства Ω . Семейство $\{R_1, R_2, \dots\}$ представляет собой существенно бесконечное открытое покрытие, содержащееся в подбазе S . $\square$

Предложение В.2. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и ρ — хаусдорфова метрика в 2^X . Метрическое пространство $(2^X, \rho)$ компактно.

Доказательство. Покажем сначала, что пространство $(2^X, \rho)$ является сепарабельным. Так как пространство (X, d) компактно, то оно сепарабельно. Пусть D — счетное всюду плотное множество в пространстве X , и пусть

$$C = \{S_{1/n}(x) \mid x \in D, \quad n = 1, 2, \dots\}.$$

Обозначим через D множество конечных объединений множеств из C . Тогда D счетное и, как мы сейчас покажем, всюду плотно в $(2^X, \rho)$. Для любых $A \in 2^X$ и $\epsilon > 0$ выберем положительное целое число n , удовлетворяющее неравенству $2/n < \epsilon$. Семейство множеств $\{S_{1/n}(x) \mid x \in D\}$ покрывает компактное множество A , поэтому существует конечное подсемейство $\{S_{1/n}(x) \mid x \in F\}$, которое также покрывает A и для которого $S_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$ при любом $x \in F$. Множество $B = \bigcup_{x \in F} \overline{S_{1/n}(x)}$ принадлежит D и удовлетворяет неравенству $\rho(A, B) < \epsilon$.

Благодаря предложению В.1, лемме В.1 и сепарабельности $(2^X, \rho)$, для того чтобы показать, что пространство $(2^X, \rho)$ компактно, нам нужно только доказать, что любое открытое покрытие множества 2^X , которое является подмножеством базы $G \cup K$, содержит конечное подпокрытие 2^X .

Итак, пусть $\{G_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — семейство открытых множеств и $\{K_\beta \mid \beta \in B\}$ — семейство замкнутых множеств в X такое, что

$$2^X = \left[\bigcup_{\alpha \in A} 2^{G_\alpha} \right] \cup \left[\bigcup_{\beta \in B} (2^X - 2^{K_\beta}) \right].$$

Рассмотрим замкнутое множество $K_0 = \bigcap_{\beta \in B} K_\beta$. По определению, $K_0 \not\subset \bigcup_{\beta \in B} (2^X - 2^{K_\beta})$, поэтому $K_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} 2^{G_\alpha}$. Таким образом, для некоторого $\alpha_0 \in A$ имеем $K_0 \in 2^{G_{\alpha_0}}$, т.е. $K_0 \subset G_{\alpha_0}$. Это означает, что

$$X - G_{\alpha_0} \subset X - K_0 = \bigcup_{\beta \in B} (X - K_\beta),$$

и так как множество $X - G_{\alpha_0}$ компактно, то существует конечное множество $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} \subset B$, для которого

$$X - G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{k=1}^n (X - K_{\beta_k}). \quad (13)$$

Чтобы завершить доказательство, покажем, что

$$2^X = 2^{G_{\alpha_0}} \cup \left[\bigcup_{k=1}^n (2^X - 2^{K_{\beta_k}}) \right].$$

Если $C \in 2^X$, то либо $C \subset G_{\alpha_0}$ (в этом случае $C \in 2^{G_{\alpha_0}}$), либо $C \cap (X - G_{\alpha_0}) \neq \emptyset$. В последнем случае из включения (13) следует, что для некоторого k $C \cap (X - K_{\beta_k}) \neq \emptyset$, т.е. $C \in 2^X - 2^{K_{\beta_k}}$. $\square$

Рассмотрим теперь некоторые понятия сходимости в пространстве $(2^X, \rho)$. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность множеств из 2^X . Определим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0\}, \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0\}. \quad (15)$$

Например, если $X = [-1, 1]$, а $A_n = \{(-1)^n\}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{-1, 1\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$. Если $X = [-1, 1]$ и $A_n = [-1/n, 1/n]$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{0\}$. Очевидно, что имеет место включение $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Справедливо также, что множества $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ замкнуты. Чтобы убедиться в этом для множества $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, рассмотрим последовательность $\{x_m\}$, принадлежащую множеству $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и сходящуюся к x . Тогда из неравенства (6) для любого m имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) \leq d(x, x_m) + \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_m, A_n) = d(x, x_m).$$

и так как расстояние $d(x, x_m)$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого номера m , то приходим к заключению, что $x \in \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Заменяя в предыдущих рассуждениях $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ на $\limsup_{n \rightarrow \infty}$, можно показать замкнутость множества $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, то их общее значение обозначим через $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Введение этого обозначения оправдано следующим предложением.

Предложение В.3. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и ρ — хаусдорфова метрика в 2^X . Пусть $\{A_n\}$ — последовательность из семейства 2^X . Равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad (16)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A) = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Предположим на минуту, что $A \neq \emptyset$ и что выполнено равенство (16). Тогда для любого x , принадлежащего компактному множеству A , $d(x, A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для данного числа $\epsilon > 0$ возьмем точки $\{x_1, \dots, x_k\}$ множества A такие, что открытые сферы $S_{\epsilon/2}(x_j)$, $j = 1, \dots, k$, покрывают множество A . Выберем число N столь большим, чтобы при всех $n \geq N$ $d(x_j, A_n) \leq \epsilon/2$, $j = 1, \dots, k$.

Теперь воспользуемся условием Липшица для функции $x \rightarrow d(x, A_n)$ (ср. (6)), чтобы получить неравенство $d(x, A_n) \leq \epsilon \forall x \in A$. Из последнего следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in A} d(x, A_n) = 0$. Из этого равенства и из (3) вытекает,

что равенство (17) будет выполняться, если мы сможем показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{y \in A_n} d(y, A) = 0. \quad (18)$$

Если равенство (18) нарушается, что для некоторого числа $\epsilon > 0$ существу-

ет последовательность $y_k \in A_{n_k}$ такая, что $n_1 < n_2 < \dots$ и

$$d(y_k, A) \geq \epsilon \quad \forall k. \quad (19)$$

Из компактности множества X следует, что последовательность $\{y_k\}$ сходится к некоторой точке $y_0 \in X$, которая в силу неравенства (19) и непрерывности функции $x \rightarrow d(x, A)$ должна удовлетворять неравенству $d(y_0, A) \geq \epsilon$. Но в силу (14) $y_0 \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$, а это противоречит равенству (16). Следовательно, выполняется равенство (18).

По-прежнему, считая $A \neq \emptyset$, перейдем к доказательству достаточности условия предложения. Если выполняется (17), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0 \quad \forall x \in A \quad (20)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{y \in A_n} d(y, A) = 0. \quad (21)$$

Из (20) следует, что

$$A \subset \varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n. \quad (22)$$

Если $x \in \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, то по определению, существует последовательность $y_k \in A_{n_k}$ такая, что $n_1 < n_2 < \dots$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, y_k) = 0. \quad (23)$$

Из (6) вытекает, что

$$d(x, A) \leq d(x, y_k) + d(y_k, A),$$

и, устремляя $k \rightarrow \infty$ и используя равенства (21) и (23), получаем, что $d(x, A) = 0$. Так как множество A замкнуто, то отсюда следует, что $x \in A$ и

$$\varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset A. \quad (24)$$

Объединяя (22) и (24), получаем (16).

Наконец, предположим, что $A = \emptyset$. Если выполняется (16), то все множества A_n , за исключением конечного числа, должны быть пустыми, ибо в противном случае можно было бы найти $y_k \in A_{n_k}$, $n_1 < n_2 < \dots$, и последовательность $\{y_k\}$ имела бы некоторую предельную точку $y_0 \in \varlimsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Если все множества A_n , за исключением конечного числа, являются пустыми, то справедливость (17) следует из (5). Обратно, если выполняется (17) и $A = \emptyset$, то из (4) следует, что все множества A_n , за исключением конечного числа, являются пустыми. И равенство (16) следует из (2), (14), и (15). $\square$

Для доказательства предложения 7.33 из раздела 7.5 нам нужно понятие функции "полу непрерывной сверху в смысле Куратовского", сокращенно "полу непрерывной сверху (К)".

Определение В.2. Пусть Y — метрическое пространство и X — компактное метрическое пространство. Функция $F: Y \rightarrow 2^X$ называется *полу непрерывной сверху (К)*, если для любой сходящейся последовательности $\{y_n\}$ из Y , имеющей предел y , выполняется включение $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} F(y_n) \subset F(y)$.

Аналогия между определением В.2 и понятием полу непрерывной сверху действительной или действительной в расширенном смысле функции очевидна (лемма 7.13(6)). Хотя мы не будем рассматривать полу непрерывные снизу функции (К), интересно отметить, что такое понятие существует, и его определение очевидно, а именно, функция $F: Y \rightarrow 2^X$ называется

полунепрерывной снизу (К), если для любой сходящейся последовательности $\{y_n\}$ из Y с пределом, равным y , имеет место включение $\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) \supset F(y)$.

Из предложения В.3 можно видеть, что функция $F: Y \rightarrow 2^X$ непрерывна в обычном смысле (в 2^X рассматривается экспоненциальная топология) тогда и только тогда, когда она одновременно полунепрерывна сверху и снизу (К). Мы продолжим аналогию с действительными функциями и покажем, что полунепрерывная сверху (К) функция является борелевской. Оставшаяся часть приложения посвящена этому вопросу.

Лемма В.2 Пусть Y — метрическое пространство и X — компактное метрическое пространство. Если функция $F: Y \rightarrow 2^X$ полунепрерывная сверху (К), то для любого открытого множества $G \subset X$ множество

$$\{y \in Y \mid F(y) \subset G\} = F^{-1}(2^G) \quad (25)$$

открыто.

Доказательство. Открытость множества $F^{-1}(2^G)$ для любого открытого множества G в действительности эквивалентна полунепрерывности сверху (К), но нам нужен только сформулированный более слабый результат. Чтобы доказать его, мы покажем, что для открытого множества G множество $F^{-1}(2^X - 2^G)$ замкнуто. Если $\{y_n\}$ — последовательность из этого множества с пределом, равным $y \in Y$, то

$$F(y_n) \cap (X - G) \neq \emptyset, \quad n = 1, 2, \dots,$$

поэтому существует последовательность $\{x_n\}$, принадлежащая компакному множеству $X - G$, такая, что $x_n \in F(y_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Эта последовательность имеет предельную точку $x \in X - G$ и в силу равенства (14) $x \in \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n)}$. Из полунепрерывности сверху (К) функции F следует, что $x \in F(y)$, и поэтому $F(y) \cap (X - G) \neq \emptyset$, т.е. $y \in F^{-1}(2^X - 2^G)$. $\square$

Предложение В.4. Пусть Y — метрическое пространство, (X, d) — компактное метрическое пространство, и пусть в множестве 2^X введена экспоненциальная топология. Пусть функция $F: Y \rightarrow 2^X$ полунепрерывна сверху (К). Тогда функция F измерима по Борелю.

Доказательство. Если функция $F: Y \rightarrow 2^X$ полунепрерывна сверху (К) и G — открытое подмножество пространства X , то множество $F^{-1}(2^G)$ измеримо по Борелю в Y в силу леммы В.2. Если K — замкнутое подмножество пространства X , то определим открытые множества $G_n = \{x \mid d(x, K) < 1/n\}$. Имеем $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, и поэтому замкнутое множество A является подмножеством множества K тогда и только тогда, когда $A \subset G_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Отсюда следует, что $2^K = \bigcap_{n=1}^{\infty} 2^{G_n}$ и множество

$$F^{-1}(2^K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^{-1}(2^{G_n})$$

представляет собой G_δ -подмножество и, следовательно, измеримо по Борелю в Y . Отсюда вытекает, что для любого множества G в подбазе $G \cup K$ экспоненциальной топологии в 2^X множество $F^{-1}(G)$ измеримо по Борелю в Y . В силу предложения 7.1 любое открытое множество из семейства 2^X может быть представлено в виде счетного объединения конечных пересечений множеств из подбазы $G \cup K$, и поэтому его прообраз при отображении F измерим по Борелю. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы. — М.: Наука, 1975.
2. Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы вероятностей. — Теория вероятностей и ее применения, 1, № 2 (1956), 157—214.
3. Селивановский Е. Об одном классе эффективных множеств (множества C). — Матем. сборник, 35 (1928), 379—413.
4. Фрид Е.Б. Об одной задаче Д. Блекуэлла из теории динамического программирования. — Теория вероятностей и ее применения, 15, № 4 (1970), 740—745.
5. Юшкевич А.А. Сведение управляемой марковской модели с неполными данными к задаче с полной информацией в случае борелевских пространств состояний и управлений. — Теория вероятностей и ее применения, 21 (1976), 152—157.
6. Янкоу В. Об унификации A -множеств. — ДАН СССР, 30 (1941), 591—592.
7. Ash R. Real Analysis and Probability. — New York: Academic Press, 1972.
8. Astrom K.J. Optimal control of Markov processes with incomplete state information. — J. Math. Anal. Appl. 10 (1965), 174—205.
9. Bellman R. Dynamic Programming. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1957. [Русский перевод: Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: ИЛ, 1960].
10. Bertsekas D.P. Infinite-time reachability of state-space regions by using feedback control. — IEEE Trans. Automatic Control, AC-17 (1972), 604—613.
11. Bertsekas D.P. — On error bounds for successive approximation methods. — IEEE Trans. Automatic Control, AC-21 (1976), 394—396.
12. Bertsekas D.P. Dynamic Programming and Stochastic Control. — New York; Academic Press, 1976.
13. Bertsekas D.P. Monotone mappings with application in dynamic programming. — SIAM J. Control Optimization, 15 (1977), 438—464.
14. Bertsekas D.P. and Shreve S. Existence of optimal stationary policies in deterministic optimal control. — J. Math. Anal. Appl. (to appear).
15. Billingsley P. Invariance principle for dependent random variables. — Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 250—282.
16. Blackwell D. Positive dynamic programming. — Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability, 1965, 415—418. [Русский перевод: Блекуэлл Д. Положительное динамическое программирование. — Сб. "Математика", 13, 5 (1969), 103—106].
17. Blackwell D. Discounted dynamic programming. — Ann. Math. Statist., 36 (1965), 226—235.
18. Blackwell D. On stationary policies. — J. Roy. Statist. Soc. 133A (1970), 33—37. [Русский перевод: Блекуэлл Д. О стационарных стратегиях. — Сб. "Математика", 14, 2 (1970), 155—159.]
19. Blackwell D. Borel-programmable functions. — Ann. Prob., 6, (1978) 321—324.
20. Blackwell D., Freedman D. and Orkin M. — The optimal reward operator in dynamic programming. — Am. Probability, 2 (1974), 926—941.
21. Bourbaki N. General Topology. — Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1966. [Русский перевод: Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь. — М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1975.]
22. Bressler D.W. and Sion M. The current theory of analytic sets. — Canad. J. Math., 16 (1964), 207—230.
23. Brown L.D. and Purves R. Measurable selections of extrema. — Ann. Statist., 1 (1973), 902—912.

24. *Cenzer D. and Mauldin R.D.* Measurable parameterizations and selections. — Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).
25. *Dellacherie C.* Ensembles Analytiques. Capacites, Mesures de Hausdorff. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1972.
26. *Denardo E.V.* Contraction mappings in the theory underlying dynamic programming. — SIAM Rev., 9 (1967), 165—177.
27. *Derman C.* Finite State Markovian Decision Processes. — New York: Academic Press, 1970.
28. *Doob J.L.* Stochastic Processes. — New York: Wiley, 1953. [Русский перевод: Дуб Дж. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956.]
29. *Dubins L. and Freedman D.* Measurable sets of measures. — Pacif. J. Math., 14 (1964), 1211—1222.
30. *Dubins L. and Savage L.* Inequalities for Stochastic Processes (How to Gamble if you Must). — New York: McGraw-Hill, 1965. (Republished by Dover, New York, 1976).
31. *Dugundji J.* Topology. — Rockleigh, New Jersey: Allyn & Bacon, 1966.
32. *Freedman D.* The optimal reward operator in special classes of dynamic programming problems. — Ann. Probability, 2 (1974), 942—949.
33. *Furukawa N.* Markovian decision processes with compact action spaces. — Ann. Math. Statist., 43 (1972), 1612—1622.
34. *Furukawa N. and Iwamoto S.* Markovian decision processes and recursive reward functions. — Bull. Math. Statist., 15 (1973), 79—91.
35. *Furukawa N. and Iwamoto S.* Dynamic programming on recursive reward systems. — Bull. Math. Statist., 17 (1976), 103—126.
36. *Gödel K.* The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 24 (1938), 556—557.
37. *Halmos P.R.* Measure Theory. — Princeton, New Jersey: Van Nostrand—Reinhold, 1950. [Русский перевод: Халмош П.Р. Теория меры. — М.: ИЛ, 1958.]
38. *Hausdorff F.* Set Theory. — New York: Chelsea, Bronx, 1957. [Русский перевод: Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.—Л.: ОНТИ, 1937.]
39. *Himmelberg C.J., Parthasarathy T. and Van Vleck F.S.* Optimal plans for dynamic programming problems. — Math. Operations Res., 1 (1976), 390—394.
40. *Hinderer K.* Foundations of Nonstationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameters. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1970.
41. *Hoffman Jorgensen J.* The Theory of Analytic Spaces. — Aarhus, Denmark: Aarhus Universitet, 1970.
42. *Hordijk A.* Dynamic Programming and Markov Potential Theory. — Amsterdam: Mathematical Centre Tracts, 1974.
43. *Howard R.* Dynamic Programming and Markov Processes. — Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1960. [Русский перевод: Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1964.]
44. *Jewell W.* Markov renewal programming I and II. — Operations Res., 11 (1963), 938—971. [Русский перевод: Джовелл В. Управляемые полумарковские процессы ч. I и II. — Кибернетический сборник, новая серия. Вып. 4. — М.: Мир, 1967.]
45. *Kantorovich L. and Livenson B.* Memoire on analytical operations and projective sets. — Fund. Math. 18 (1932), 214—279.
46. *Kuratowski K., Topology I.* — New York: Academic Press, 1966. [Русский перевод: Куратовский К. Топология, т. I. — М.: Мир, 1966.]
47. *Kuratowski K., Topology II.* — New York: Academic Press, 1968. [Русский перевод: Куратовский К. Топология, т. II. — М.: Мир, 1969.]
48. *Kuratowski K. and Mostowski A.* Set Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1976.
49. *Kuratowski K. and Ryll-Nardzewski C.* A general theorem on selectors. — Bull. Polish Acad. Sci., 13 (1965), 397—411.
50. *Kushner H.* Introduction to Stochastic Control. — New York: Holt, 1971.
51. *Loève M.* Probability Theory. — Princeton, New Jersey: Van Nostrand—Reinhold, 1963. [Русский перевод: Лозе М. Теория вероятностей. — М.: ИЛ, 1962.]
52. *Lusin N.* Sur les ensembles analytiques. — Fund. Math., 10 (1927), 1—95.
53. *Lusin N. and Sierpinski W.* Sur quelques propriétés des ensembles (A). — Bull. Acad. Sci., Cracovie (1918), 35—48.
54. *Mackey G.* Borel structure in groups and their duals. — Trans. Math. Soc., 85 (1957), 134—165.
55. *Maitra A.* Discounted dynamic programming on compact metric spaces. — Sankhya 30A (1968), 211—216.
56. *McQueen J.* A modified dynamic programming method for Markovian decision problems. — J. Math. Anal. Appl., 14 (1966), 38—43.
57. *Meyer P.A.* Probability and Potentials. — Boston, Massachusetts: Ginn & Blaisdell, 1966. [Русский перевод: Мейер П.—А. Вероятность и потенциалы. — М.: Мир, 1973.]

58. *Meyer P.A. and Traki M.* Réduites et jeux de hasard (Séminaire de Probabilités VII, Université de Strasbourg). — In: Lecture Notes in Mathematics. — Berlin: Springer, 1973, v. 321, p. 155–171.
59. *Neumann J. von.* On rings of operators. Reduction theory. — Ann. of Math., 50 (1949), 401–485.
60. *Olsen P.* Multistage stochastic programming with recourse. The equivalent deterministic problem. — SIAM J. Control Optimization, 14 (1976), 495–517.
61. *Olsen P.* When is a multistage stochastic programming problem well-defined? — SIAM J. Control Optimization, 14 (1976), 518–527.
62. *Olsen P.* Multistage stochastic programming with recourse as mathematical programming in an L_p -space. — SIAM J. Control Optimization, 14 (1976), 528–537.
63. *Ornstein D.* On the existence of stationary optimal strategies. — Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 563–569.
64. *Ortega J.M. and Rheinboldt W.C.* Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables. — New York: Academic Press, 1970.
65. *Parthasarathy K.* Probability Measures on Metric Spaces. — New York: Academic Press, 1967.
66. *Rhenius D.* Incomplete information in Markovian decision models. — Ann. Statist., 2 (1974), 1327–1334.
67. *Rockafellar R.T.* Integral functionals, normal integrands and measurable selections. — In: Nonlinear Operators and the Calculus of Variations. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1976.
68. *Rockafellar R.T. and Wets R.* Stochastic convex programming: relatively complete recourse and induced feasibility. — SIAM J. Control Optimization, 14 (1976), 574–589.
69. *Rockafellar R.T. and Wets R.* Stochastic convex programming: basic duality. — Pacific J. Math., 62 (1976), 173–195.
70. *Royden H.L.* Real Analysis. — New York: Macmillan, 1968.
71. *Saks S.* Theory of the Integral. — New York: Stechert, 1937. [Русский перевод: Сакс С. Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.]
72. *Sawaragi Y. and Yoshikawa T.* Discrete-time Markovian decision processes with incomplete state information. — Ann. Math. Statist., 41 (1970), 78–86.
73. *Schäl M.* On continuous dynamic programming with discrete time parameter. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 21 (1972), 279–288.
74. *Schäl M.* On dynamic programming: Compactness of the space of policies. — Stochastic Processes Appl., 3 (1975), 345–364.
75. *Schäl M.* Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n -stage optimal policies to be optimal. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw., Gebiete, 32 (1975), 179–196.
76. *Shreve S.* A General Framework for Dynamic Programming with Specializations. — M.S. theses (1977), Dept. of Elec. Eng., Univ. of Illinois, Urbana.
77. *Shreve S.* Dynamic Programming in Complete Separable Spaces. — Ph. D. theses (1977), Dept. of Math. Univ. of Illinois, Urbana.
78. *Shreve S. and Bertsekas D.P.* A new theoretical framework for finite horizon stochastic control. — Proc. Fourteenth Annual Allerton Conf. Circuit and System Theory, Allerton Park, Illinois, October, 1976, 336–343.
79. *Shreve S. and Bertsekas D.P.* Equivalent stochastic and deterministic optimal control problems. — Proc. 1976 IEEE Conf. Decision and Control, Clearwater Beach, Florida, 705–709.
80. *Shreve S. and Bertsekas D.P.* Alternative theoretical frameworks for finite horizon discrete-time stochastic optimal control. — SIAM J. Control Optimization, 16 (1978).
81. *Shreve S. and Bertsekas D.P.* Universally measurable policies in dynamic programming — Mathematics of Operations Research. (to appear).
82. *Solovay R.* A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable — Ann. Math., 92 (1970), 1–56.
83. *Strauch R.E.* Negative dynamic programming. — Ann. Math. Statist., 37 (1966), 871–890.
84. *Striebel C.* Sufficient statistics in the optimal control of stochastic systems. — J. Math. Anal. Appl., 12 (1965), 577–592.
85. *Striebel C.* Optimal Control of Discrete Time Stochastic Systems. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1975.
86. *Suslin M. (Souslin).* Sur une définition des ensembles mesurables sans nombres transfinis. — C.R. Acad. Sci., Paris, 164 (1917), 88–91.
87. *Varadarajan V.S.* Weak convergence of measures on separable metric spaces. — Sankhya, 19 (1958), 15–22.
88. *Wagner D.H.* Survey of measurable selection theorems. — SIAM J. Control Optimization, 15 (1977), 859–903.

89. *Wald A.* Statistical Decision Functions. — New York: Wiley, 1950. [Русский перевод: *Вальд А.* Статистические решающие функции. — В кн.: *Позиционные игры.* — М.: Наука, 1967, с. 300–522.]
90. *Witsenhausen H.S.* A standard form for sequential stochastic control. — *Math. Systems Theory*, 7 (1973), 5–11.

Литература, добавленная редактором перевода

91. *Гухман И.И., Скороход А.В.* Управляемые случайные процессы. — Киев: Наукова думка, 1977, 252 с.
92. *Звонкин А.К.* О последовательно управляемых марковских процессах. — Матем. сборник, 1971, т. 86 (128), с. 611–621.
93. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
94. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. — М.: Наука, 1977, 400 с.
95. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974, 696 с.
96. *Неев Дж.* Математические основы теории вероятностей. — М.: Мир, 1969.
97. *Прагараускас Г.* Управление решением стохастического уравнения с разрывными траекториями. — Литовский матем. сб., 1978, 18, № 1, с. 147–167.
98. *Прагараускас Г.* О единственности решения уравнения Беллмана в случае общих управляемых случайных процессов. — Литовский матем. сб., 1982, 22, № 2, с. 137–156.
99. *Прессман Э.Л., Сонин И.Н.* Последовательное управление по неполным данным. Байесовский подход. — М.: Наука, 1982, 256 с.
100. *Файнберг Е.А.* ϵ -оптимальное управление конечной целью Маркова при среднем критерии. — Теор. вероятн. и ее прим., 1980, 25, № 1, с. 71–82.
101. *Файнберг Е.А.* Управляемые марковские процессы с произвольными числовыми критериями. — Теория вероятн. и ее прим., 1982, 27, № 3, с. 456–473.
102. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1980, 576 с.
103. *Ширяев А.Н.* Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов. — In Transactions of the Fourth Prague conference on Information theory etc., Prague, 1965. — Praha: Academia, 1967, с. 131–203.
104. *Юшкевич А.А., Читашили Р.Я.* Управляемые случайные последовательности и цепи Маркова. — Успехи матем. наук, 1982, 37, № 6 (228), с. 213–242.
105. *Юшкевич А.А.* Управляемые скачкообразные марковские модели. — Теория вероятн. и ее прим., 1980, 25, № 2, с. 247–270.
106. *Bensoussans A., Lions J.L.* Applications des inequations variationnelles on controle stochastique. — Paris: Dunod, 1978, p. 545.
107. *Blackwell D.* Discrete dynamic programming. — *Ann. Math. Stat.*, 33, 1962, p. 719–726.
108. *Blackwell D., Ryll-Nardzewski C.* Non-existence of everywhere proper conditional distributions. — *Ann. Math. Stat.*, 1963, 34, p. 223–225.
109. *De Leve G.* Generalized Markovian Decision Processes, Part I, II. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1964.
110. *De Leve G., Tijms H.C., Weeda P.J.* Generalized Markovian Decision processes, Applications. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1970.
111. *Dubins L.E., Savage L.J.* How to gamble if must (Inequalities for Stochastic Processes). — N.Y.: McGraw-Hill, 1965.
112. *Dynamische Optimierung* (Bonner Mathematische Schriften, N 98). — Bonn, 1977, 172 p.
113. *Dynamic Programming and its Applications*, ed. by M.L. Puterman. — N.Y. etc.: Academic Press, 1978, p. 410.
114. *Fainberg E.A., Sonin M.* Stationary and Markov policies in countable state dynamic programming. — Proc. Fourth USSR — Japan Sympos. Tbilisi 1982. Lect. Notes in Mathematics № 1021, 1983, p. 111–129.
115. *Fleming W.H., Rishel R.W.* Deterministic and Stochastic Optimal Control. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1975, p. 222. [Русский перевод: *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978, 316 с.]
116. *Girlich H.-J.* Diskrete Stochastische Entscheidungsprozesse. — Leipzig. Teubner, 1973, 152 p.
117. *Markov Decision Theory*, ed. by H.C. Tijms, J. Wessels. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 220 p.
118. *Mine H., Osaki Sh.* Markovian Decision Processes. — N.Y. etc.: Elsevier, 1970, p. 142. [Русский перевод: *Майн Х., Осаки С.* Марковские процессы принятия решений. — М.: Наука, 1977, 176 с.]

119. Recent Developments in Markov Decision Processes, ed. by R. Hartley, L.C. Thomas, D.J. White. — London etc.: Academic Press, 1980, 334 p.
120. Ross Sh.M. Applied Probability Models with Optimization Applications. — San Francisco: Holden-Day, 1970, 198 p.
121. Schäl M. Utility functions and optimal policies in sequential decision problems. — In: Game theory and mathematical economics, ed. by O. Moeschlin, D. Pallaschke. — Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1981, p. 357—365.
122. Schäl M. Existence of optimal policies in stochastic dynamic programming. — Proc. 6th Conf. Probab. Theory, Bucarest Acad. Rep. Soc. Romania, 1981, p. 205—219.
123. van Hee K.M. Bayesian control of Markov chains. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1978.
124. van Nunen J.A.E.E. Contracting Markov decision processes. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1976.
125. Van der Wal J. Stochastic dynamic programming, successive approximations and nearly optimal strategies for Markov decision processes and Markov games. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981, 251 p.
126. Veinott A.F. Discrete dynamic programming with sensitive optimality criteria. — Ann. Math. Stat., 1969, 40, № 5, p. 1635—1660.
127. Weeda P.J. Finite generalized Markov programming. — Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1979, 127 p.
128. White D.J. Finite Dynamic Programming. — N.Y.: Wiley, 1978, 256 p.
129. Yushkevich A.A. Continuous time Markov decision processes with interventions. — Stochastics, 1983, 9, № 4, p. 235—274.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Задача двухшаговая 19

- детерминированная 15
- нестационарная 37
- с бесконечным горизонтом 35, 70
- с дискретным временем 17
- с конечным горизонтом 35
- стохастическая 17

Издержки 34, 170, 191, 193, 217, 222, 241

Измеримость аналитическая 155

— универсальная 151

Индикатор множества 95

Интеграл внешний 21, 40, 68, 85, 243

Итерация стратегий 64, 65

Коэффициент дисконтирования 36

Куб Гильберта 95, 98

Лемма Урысона 97

Мера вероятностная регулярная 112

— p -внешняя 150

Метрика хаусдорфова 267

Множество аналитическое 141, 142, 145

— — вероятностных мер 153

— — измеримое универсально 151

— — неизмеримое по Борелю 256

Модель борелевская 24

— общая 22

— полунепрерывная 23

— сверху 188

— снизу 187

— с бесконечным горизонтом (SM) 91, 190, 191

— с конечным горизонтом 90, 168, 169

Модель с мультипликативными издержками 241

— стохастическая нестационарная (NSM) 215—217

— — с неполной информацией (ISI) 220—222

— — с полной информацией (PSI) 223

— — стационарная (SSM) 217

Парадокс Санкт-Петербургский 214

Подбаза топологии 97

Подмножество борелевское 107

Последовательность управлений допустимая 194

Предположение монотонности 34

— сжимаемости 55

Программирование динамическое 78, 173 и д., 203

— математическое 68

Произведение пространств декартовое 94

Пространство борелевское 108

— Бэра нулевое 101

— возмущений счетное 37

— Линделефа 97, 269

— метризуемое 96

— метрическое вполне ограниченное 103

— сепарабельное 97

— состояний 32

— с покрытием 94

— топологически полное 98

— управлений 32

Расстояние между точкой и множеством 96

Система Дынкина 121

— Суслина 142, 146

Статистика 222

— достаточная 222, 231

Стратегия 32

— аналитически измеримая 240

— марковская 18, 191, 216

— нерандомизированная 191, 216

— полумарковская 191, 216

— предельно измеримая 237 и д.

— равномерно оптимальная 35, 185

— слабо q - ϵ -оптимальная 228

— стационарная 32, 76, 78, 191, 193

— F измеримая 170, 191

— ϵ -оптимальная 35, 171, 211

Теорема Александрова 98

— Куратовского 111

— Урысона 98

— Янкова — фон Неймана 164

Точка неподвижная 57

Управление детерминированное 36

— минимаксное 43, 54, 70, 86

— стохастическое 37, 40

Уравнение оптимальности 200

— прогноза на один шаг 233

Уравнения фильтрации 233

Фильтрация 232

Функционал издержек мультипликатив-
ный 42, 53, 86

Функция аналитически измеримая 155

— издержек 34, 35

— переходная 122, 169

— полуаналитическая снизу 160

— — сверху 132, 272, 273

— полунепрерывная снизу 132

— предельно измеримая 262

— универсальная 256

— универсально измеримая 155

Ядро переходное 216

— системы Суслина 142

— стохастическое 122

σ -алгебра 95, 107

— аналитическая 95, 154

— наименьшая 108

— порожденная классом подмножеств
107

— предельная 168, 259

— универсальная 95, 151

Димитри Бертсекас, Стивен Шрив

**СТОХАСТИЧЕСКОЕ
ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ**

**Случай
дискретного времени**

Редактор Д.С. Фурманов

**Технические редакторы
В.В. Лебедева, О.Б. Черняк**

Корректоры Т.В. Обод, Т.А. Печко

**Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах**

ИБ № 11956

Сдано в набор 07.12.84

Подписано к печати 26.02.85

Формат 60 × 90 1/16

Бумага офсетная № 1. Гарнитура Универс

Печать офсетная. Усл.печ.л. 17,5

Усл.кр.-отт. 17,5 . Уч.-изд.л. 22,35

Тираж 3500 экз. Тип. зак 385

Цена 3 р. 70 к.

**Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"**

**Главная редакция
физико-математической литературы
117071 Москва В-71,
Ленинский проспект, 15**

**4-я типография издательства "Наука"
630077 г. Новосибирск-77,
ул. Станиславского, 25**

